Leçon n°2 : Probabilité

I) Vocabulaire

A) Expérience aléatoire

Expérience :

On place dans une boîte 11 jetons numérotés de 1 à 11 : ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪

Ils sont **indiscernables** au toucher. On en pioche un au hasard et on regarde son numéro.

- On connaît tous les résultats possibles de l'expérience ;
- On ne peut pas connaître le résultat du tirage à l'avance.
- On peut reproduire plusieurs fois l'expérience dans les mêmes conditions.

On parle alors d'**expérience aléatoire**.

Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé **une issue**.

On a donc …11… issues possibles qui sont : …1 ; 2; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 et 11.……

B) Evènement

Un évènement est une condition qui peut être, ou ne peut pas être, réalisée lors d'une expérience aléatoire. S'il est réalisé, il **peut être réalisé par une ou plusieurs issues** de l'expérience.

On considère les évènements suivants (réalisés par une ou plusieurs issues) :

A : « obtenir 7 » → réalisé par l'issue 7

B : « obtenir un nombre impair » → réalisé par les issues 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 et 11.

C : « obtenir un nombre premier » → réalisé par les issues 2 ; 3 ; 5 ; 7 et 11.

D : « obtenir un diviseur de 10 » → réalisé par les issues 1 ; 2 ; 5 et 10.

E : « obtenir un multiple de 3 » → réalisé par les issues 3 ; 6 et 9.

F : « obtenir un nombre entier » → réalisé par toutes les issues 1 ; 2; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 et 11.

G : « obtenir 25 » → qui n'est réalisé par aucune issue.

On considère l'évènement « obtenir un nombre qui n'est pas un nombre premier »

Cet évènement est réalisé par les issues 1 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 et 10.

On dit alors que cet évènement est l'**évènement contraire** de l'évènement C.

On le note « $\bar{C}$ » et on le lit oralement « C barre ».

L'évènement A est appelé évènement **élémentaire**. (1 seule issue se réalise)

L'évènement F est appelé évènement **certain**. (toutes les issues se réalisent)

L'évènement G est appelé évènement **impossible**. (aucune issue se réalise)

II) Probabilité

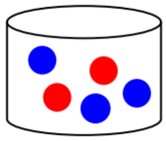
A) Vocabulaire

Définition : La **probabilité** d'un événement est la « chance » qu'un événement a de se produire.

Exemple : Une urne contient 3 balles bleues et 2 balles rouges indiscernables au toucher.

On a donc …2. chances sur …5. de tirer une balle rouge.

On dit que la probabilité de tirer une balle rouge est $\frac{2}{5}$



Définition : Lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité (dé non truqué par exemple), on dit que l'on est dans une situation d'**équiprobabilité**.

B) Calculs de probabilité

Propriété : La probabilité **P(A)** d'un événement A est alors :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent A}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

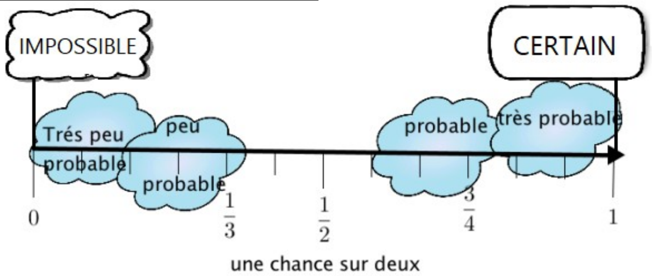
(se lit « P de A », comme avec les fonctions)

Exemple : En reprenant la boîte avec les 11 jetons, calculons les probabilités des évènements :

$P(A) = \frac{1}{11}$ $P(B) = \frac{6}{11}$ $P(C) = \frac{5}{11}$ $P(D) = \frac{4}{11}$

$P(E) = \frac{3}{11}$ $P(F) = \frac{11}{11} = 1$ $P(G) = \frac{0}{11} = 0$

Echelle des possibles :



Exemple : Une probabilité est un nombre qui est toujours compris entre …0.. et …1..

$P(C) + P(\overline{C}) = \frac{5}{11} + \frac{6}{11} = \frac{11}{11} = …1.$

Propriété : Soit A un évènement. Alors $P(A) + P(\overline{A}) = 1.$

III) Fréquences d'apparition

On modélise à l'aide d'un script SCRATCH, 2 700 lancers d'une pièce non truquée et on note les effectifs d'apparition de chaque face dans le tableau ci-dessous :

Faces	*Pile*	*Face*	*Total*
Effectifs	1 389	1 311	2700
Fréquences (en %)	51	49	100

Face : 2 700 - 1389 = 1 311

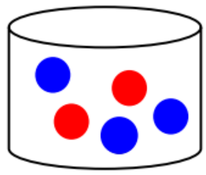
Fréquence de Pile $= \frac{\text{Effectif de Pile}}{\text{Effectif total}} = \frac{1\,389}{2\,700} \approx 0{,}51 = 51\ \%$

Fréquence de Face $\approx 100\ \% - 51\ \% = 49\ \%$

Les fréquences d'apparition sont très proches les unes des autres. Théoriquement, il y a autant de chance d'obtenir pile que d'obtenir face. En effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les fréquences se rapprocheraient les unes des autres de façon encore plus évidente.

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée **probabilité**.

IV) Arbre des possibles

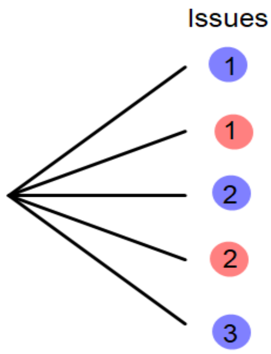


Pour un tirage à **1 seule épreuve** :

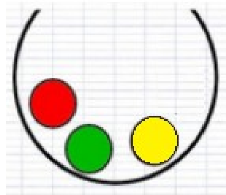
Une urne contient 2 balles rouges, 3 balles bleues.

On tire **une seule** balle dans cette urne.

On peut construire **un arbre des issues possibles** :



V) Pour un tirage à 2 épreuves = Double épreuves



Une urne contient 1 boules verte, 1 boule rouge et 1 boule jaune.

On tire, **deux fois de suite et avec remise**, une boule dans cette urne.

Il y a 2 boules tirées donc chaque tirage correspond à une épreuve.

A) Tableau à double entrée

Les différents tirages possibles peuvent être représentés par **un tableau à double entrée.**

2e lancer / 1er lancer	🟢	🔴	🟡
🟢	(🟢 ; 🟢)	(🟢 ; 🔴)	(🟢 ; 🟡)
🔴	(🔴 ; 🟢)	(🔴 ; 🔴)	(🔴 ; 🟡)
🟡	(🟡 ; 🟢)	(🟡 ; 🔴)	(🟡 ; 🟡)

Soit A l'événement : « une boule verte et une boule rouge sont obtenues ».

Nombre de tirages avec une boule verte et une rouge : Il y a **2 façons** de réaliser A : (🟢 ; 🔴) et (🔴 ; 🟢).

Nombre total de tirages possibles : Il y a 3 × 3 = **9 issues** possibles.

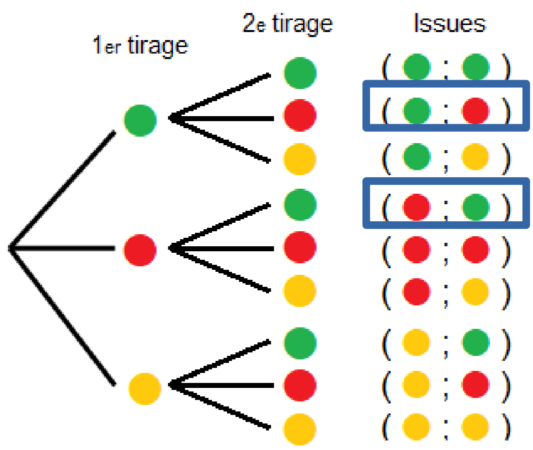
donc P (A) = $\frac{2}{9}$

B) Arbre des possibles

Les différents tirages possibles peuvent être représentés par **un arbre des possibles.**

Le 1er niveau de l'arbre correspond aux issues du 1er tirage (1er épreuve).

Le 2e niveau de l'arbre correspond aux issues du 2e tirage (2e épreuve).



L'événement A est réalisé par **2 issues** : (🟢 ; 🔴) et (🔴 ; 🟢).

On compte **9 issues** en tout.

Donc P(A) = $\frac{2}{9}$.