Dossier 5 Utiliser le calcul littéral pour modéliser, résoudre et démontrer

1) Propriétés de calcul littéral _ Règles pour "faire disparaître les parenthèses"

1. Règles concernant la notion d'opposé

Quels que soient les nombres a et b:

- $+ (a + b) = a + b$ *[Autrement dit : un +(.......) peut être éliminé sans modification du contenu des parenthèses]*
- $- (a + b) = -a - b$
- $- (a - b) = - a + b$
- $- (- a) = a$

[Autrement dit : un - (.......) peut être éliminé à condition de changer tous les signes dans le contenu des parenthèses]

Exemples

$+ (2x + 8) = 2x + 8$ $\qquad$ $- (y + 5) = - y + - 5$ $\qquad$ $- (8 - c) = -8 + c$ $\qquad$ $- (-3x) = 3x$

2. Distributivité simple

Quels que soient les nombres a, b c, d et x:

$a (b\,x + c) = a \times b\,x + a \times c$

$= ab\,x + ac$

Exemple

$8(2\,x + 8) = 8 \times 2\,x + 8 \times 8$

$= 16\,x + 64$

3. Distributivité double

$(a\,x + b)(c\,x + d) = a\,x \times c\,x + a\,x \times d + b \times c\,x + b \times d$

$= ac\,x^2 + ad\,x + bc\,x + bd$

Exemple

$(3 - 5\,x)(4\,x - 7) = 3 \times 4\,x + 3 \times (-7) + (-5\,x) \times 4\,x + (-5\,x) \times (-7)$

$= 12\,x + (-21) + - 20\,x^2 + 35\,x$

$= - 20\,x^2 + 47\,x - 21$

2) Simplifier, réduire et ordonner

a. Simplifier

Simplifier une expression littérale consiste à :

- faire disparaître les parenthèses
- effectuer toutes les multiplications
- appliquer toutes les conventions d'écriture

Exemple Simplifier l'expression : A = $-(4x + 5) - 3(8x + 1) - 1x$

A $= - 4x + 5 + (-3) \times 8x + (-3) \times 1 - 1x$	*Disparition des parenthèses 1ère étape*
$= - 4x + 5 + (-24x) + (-3) - 1x$	*On effectue les multiplications*
$= - 4x + 5 - 24x - 3 - 1x$	*On finit de faire disparaître les parenthèses*
$= - 4x + 5 -24x - 3 - x$	*On traite les conventions d'écriture.*

Cas particulier de simplification : Développer

Développer participe à l'action de simplifier.

Développer une expression consiste à transformer une somme ou une différence en un produit.

Exemples

$\underbrace{x(4x + 7)}_{\text{Produit}} = \underbrace{4x^2 + 7x}_{\text{Somme}}$

$\underbrace{x(8x^2 - 5)}_{\text{Produit}} = \underbrace{8x^3 - 5x}_{\text{Différence}}$

b. Réduire

Réduire une expression littérale advient lorsque l'expression a été simplifiée. Dans ce cas, réduire consiste à effectuer les additions **possibles**.

Exemple : Réduire A = $- 4x + 5 -24x - 3 - x$

→ A = $- 29x + 2$

c. Ordonner

Ordonner une expression littérale simplifiée et réduite consiste à présenter ses termes dans le sens décroissant de l'exposant des puissances de l'inconnue.

Exemple Ordonner B = $4x^2 + 3 + 8x - 7x^3$

→ B = $- 7x^3 + 4x^2 + 8x + 3$

3. Factoriser

Factoriser une expression consiste à transformer une expression en produit.

Exemple

Produit

$3x + 7x^2 - 21x^3 = x(3 + 7x - 21x^2)$

Différence

Cas particulier : Factorisation par un facteur commun complexe.

Exemple Factoriser $A = (2x + 5)(8x - 7) - (2x + 5)(3x + 9)$

$A = (2x + 5)(8x - 7) - (2x + 5)(3x + 9)$

$= (2x + 5)\left[(8x - 7) - (3x + 9)\right]$

$= (2x + 5)\left[8x - 7 - 3x - 9\right]$

$= (2x + 5)(5x - 16)$

4) Résoudre une équation de degré 1

Une équation de degré 1 est une expression dans laquelle on trouve:

- le symbole =
- une inconnue x dont la plus grande puissance est 1: x et pas x^2 ou x^3 ...

Résoudre 3(4x - 8) = 5(9 - 2x) consiste à déterminer les valeurs de x pour lesquelles les expressions 3(4x - 8) et 5(9 - 2x) sont égales.

Méthode de résolution **Résoudre $3(4x - 8) = 5(9 - 2x)$**

1) On simplifie les deux membres.

$3 \times 4x - 3 \times 8 = 5 \times 9 - 5 \times 2x$

$12x - 24 = 45 - 10x$

2) On transpose les termes en x dans un même membre, et les termes connus dans l'autre membre, par des additions et des soustractions.

$22x - 24 = 45$

$22x = 69$

3) On divise les deux membres par le coefficient de l'inconnue x.

$$x = \frac{69}{22}$$

4) On rédige la conclusion: La solution de l'équation est $\frac{69}{22}$.

5. Quelques remarques sur les programmes de calcul

1. Un programme de calcul est toujours associé à une expression littérale :

- Cette expression incarne le résultat général du programme.

- Cette expression est obtenue en choisissant une inconnue x comme nombre de départ.

Exemple

Le programme

- choisir un nombre
- ajouter 3
- multiplier par 5
- ajouter le double du nombre de départ.

est associé à l'expression $5(x + 3) + 2x$

Cette expression a été obtenue en choisissant x comme nombre de départ.

2. Pour déterminer la valeur choisie au départ d'un programme de calcul si on connaît le résultat correspondant, il suffit de résoudre une équation.

Exemple

Dans le programme précédent, on a obtenu 50. Quel a été le nombre choisi au départ ?

On cherche le nombre de départ x tel que le résultat $5(x + 3) + 2x$ est égal à 50.

Autrement dit on cherche à résoudre l'équation : $5(x + 3) + 2x = 50$

$$5x + 15 + 2x = 50$$

$$7x + 15 = 50$$

$$7x = 35$$

$$x = 5$$

La solution de l'équation est 5. Le nombre choisi au départ est 5.

6. Egalité et équation

Définitions

Une égalité est une expression mathématique contenant deux membres séparés par le symbole =.

Une égalité peut être vraie ou fausse.

Une identité est une égalité qui est tout le temps vraie.

Exemples

3 = 7 est une égalité fausse ; $3x + 8 = 14$ est une égalité qui est vraie si $x = 2$ et qui est fausse sinon.

$3(5x + 2) = 15x + 6$ est une identité (d'après la règle de distributivité).

Méthode Démontrer une égalité

Pour démontrer une égalité, on peut simplifier et réduire les deux membres afin d'aboutir à une expression identique.

Exemple Prouver que les deux programmes de calcul suivants conduisent au même résultat

- choisir un nombre et le multiplier par 2 - ajouter 4 au résultat précédent.	- Choisir un nombre et ajouter 2. - Multiplier par 2 le résultat précédent

Le premier programme est associé à l'expression : $2x + 4$

Le deuxième programme est associé à l'expression : $(x + 2) \times 2$

La simplification de l'expression associée au deuxième programme aboutit à : $2x + 4$

Quelle que soit la valeur du nombre choisi au départ du programme, nous obtenons le même résultat.

Nous avons ainsi démontré une **identité.** Et les programmes sont donc équivalents.

Remarque Méthode:

Ne pas confondre résoudre une équation et démontrer une identité. Résoudre une équation consiste à déterminer des valeurs **particulières** pour lesquelles une égalité est vraie alors que démontrer une identité consiste à prouver que l'égalité est **tout le temps vraie**.