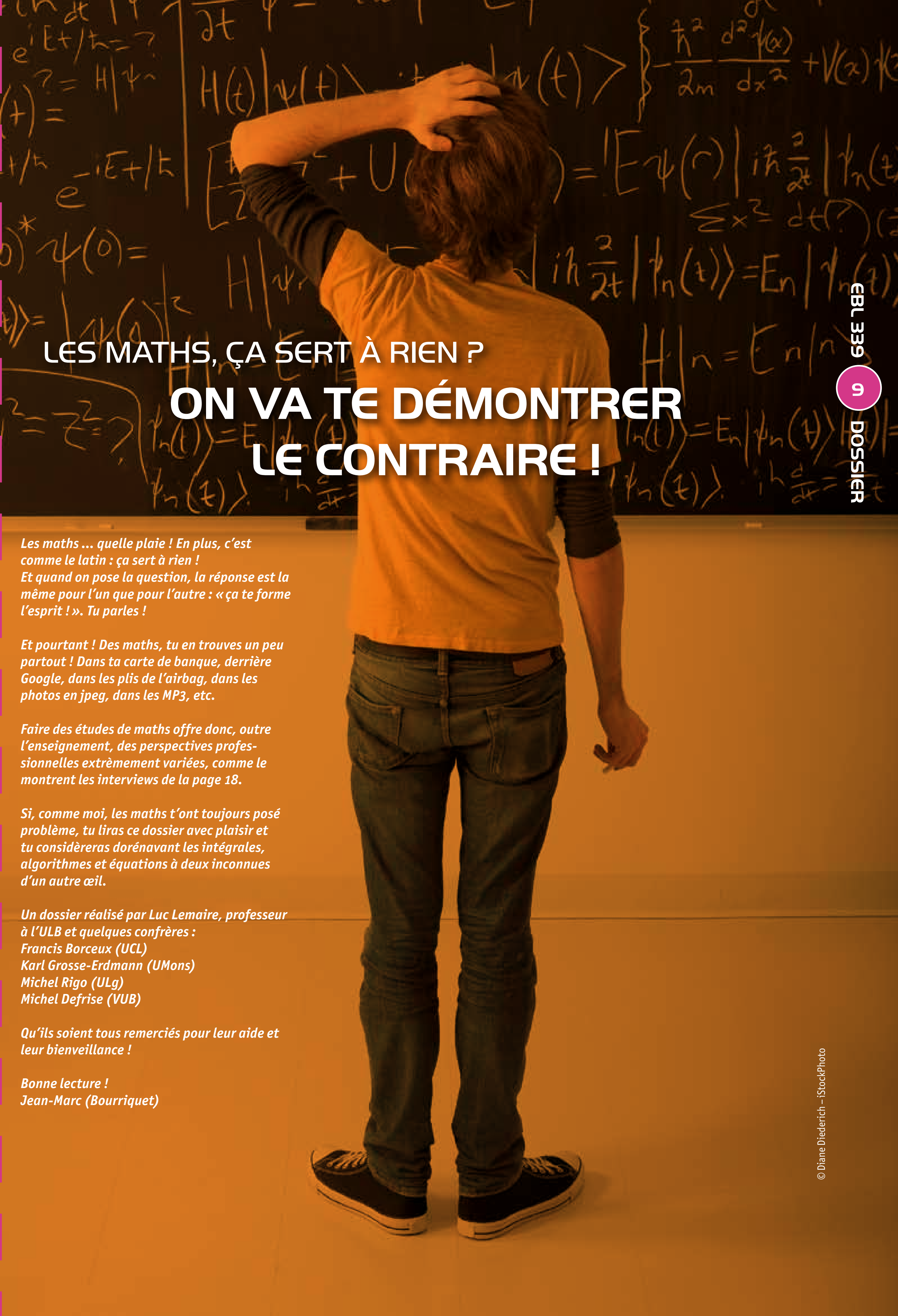


LES MATHS, ÇA SERT À RIEN ?

ON VA TE DÉMONTRER LE CONTRAIRE !

Les maths ... quelle plaie ! En plus, c'est comme le latin : ça sert à rien !
Et quand on pose la question, la réponse est la même pour l'un que pour l'autre : « ça te forme l'esprit ! ». Tu parles !

Et pourtant ! Des maths, tu en trouves un peu partout ! Dans ta carte de banque, derrière Google, dans les plis de l'airbag, dans les photos en jpeg, dans les MP3, etc.

Faire des études de maths offre donc, outre l'enseignement, des perspectives professionnelles extrèmement variées, comme le montrent les interviews de la page 18.

Si, comme moi, les maths t'ont toujours posé problème, tu liras ce dossier avec plaisir et tu considèreras dorénavant les intégrales, algorithmes et équations à deux inconnues d'un autre œil.

Un dossier réalisé par Luc Lemaire, professeur à l'ULB et quelques confrères :
Francis Borceux (UCL)
Karl Grosse-Erdmann (UMons)
Michel Rigo (ULg)
Michel Defrise (VUB)

Qu'ils soient tous remerciés pour leur aide et leur bienveillance !

Bonne lecture !
Jean-Marc (Bourriquet)

La matrice cachée de Google

Mettre en évidence les pages web les plus intéressantes, détecter des communautés ou élire des leaders au sein de réseaux sociaux, ou encore déclarer le vainqueur d'une compétition sont autant de problèmes résolus par la théorie des graphes, l'algèbre linéaire et en particulier, le calcul matriciel.

Le classement des pages web, ou PageRank, proposé initialement par les concepteurs de Google prend en compte les liens entre les pages web. Le but est d'attribuer un score à chaque page. Plus un score est élevé, mieux la page correspondante sera classée (le PageRank est un élément important, mais ce n'est pas le seul élément pris en compte dans l'élaboration du classement).

Deux règles simples sont employées :

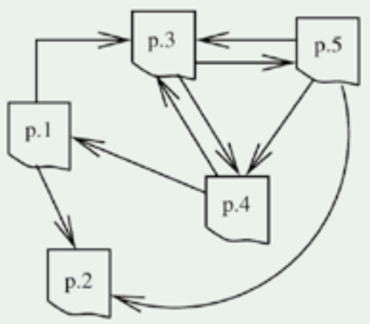
1° « Faire confiance aux experts »
Le score d'une page est élevé si celle-ci est référencée par des pages ayant elles-mêmes un score élevé.
Autrement dit, le score s_A d'une page *A* est une somme (pondérée) des scores $s_{B1},\ldots,s_{Bn}$ des différentes pages *B1,...,Bn* possédant un lien vers *A*.

2° « Les indécis ont moins de poids »
Si une page *B* possède de nombreux liens vers d'autres pages, le score s_B influencera d'autant moins le score de ces dernières.
Plus une page possède de liens vers d'autres pages, moins son score aura d'influence sur ces pages.

On obtient alors un immense système d'équations linéaires dont les inconnues sont les scores des différentes pages. Il reste alors à *manipuler astucieusement* ce système pour garantir l'existence et l'unicité d'une solution qu'il faudra ensuite calculer. Ceci met en jeu un théorème dû à Perron, datant de 1907, et le calcul de puissances de matrices.

Sur l'exemple ci-dessous, on remarque que le score de la page 2 dépend des scores des pages 1 et 5 pointant vers elle. Ces deux derniers scores sont divisés par les nombres respectifs de liens sortants (2 pour la page 1 et 3 pour la page 5).

Plus d'infos sur :
www.discmath.ulg.ac.be/mam/



$$\begin{cases} s_1 = s_4/2 \\ s_2 = s_1/2 + s_5/3 \\ s_3 = s_1/2 + s_4/2 + s_5/3 \\ s_4 = s_3/2 + s_5/3 \\ s_5 = s_3/2 \end{cases}$$

Des codes correcteurs dans ma musique ?

Nous consommons chaque jour une grande quantité de fichiers digitaux : connexion permanente à l'Internet, fichiers MP3, CD, DVD, appareils photo et vidéo numériques, etc. Ces informations, codées par des suites de 0 et de 1, sont stockées, manipulées ou encore transmises : paquets de données transitant sur Internet, communication entre une borne WiFi et un portable, signal provenant d'un satellite, lecture d'un CD,...

Dans un monde parfait, aucune erreur de lecture ou de transmission ne se produit. Il en va tout autrement dans les applications réelles. Des erreurs, par exemple causées par des traces de doigts ou une poussière à la surface d'un CD, sont inévitables (on considère qu'il y en a au moins 500 000 sur un CD !).
Pour tenter de les corriger, on introduit de la *redondance* au sein du message : on répète chaque symbole un nombre fixe de fois.
Imaginons qu'au lieu de transmettre la suite 0110, on la remplace par la suite 000 111 111 000 (chaque chiffre est recopié trois fois). On dira que cette dernière suite a un taux d'information de 1/3 (seul un chiffre sur trois est significatif). Si une erreur unique se produit, par exemple, si le destinataire reçoit la suite 010 111 111 000, il est alors naturel de décoder le message «au plus proche» pour retrouver l'information initiale.

Quelques grandes questions : pour un codage donné, combien d'erreurs est-il possible de corriger correctement ? Avec quelle probabilité ? Peut-on trouver un codage disposant d'un bon compromis entre performance (i.e., le nombre d'erreurs corrigées) et longueur du message transmis (i.e., le taux d'information). La recherche dans ce domaine est très active. L'algèbre et la manipulation de structures mathématiques comme les espaces vectoriels ou les polynômes permettent de développer des codages performants.

Pour des compléments d'information, on pourra consulter http://www.discmath.ulg.ac.be/mam/

La compression d'images

Un appareil photo numérique produit des photos de 15 mégapixels. Mais une telle qualité d'image requiert un espace de stockage important ! Sans modification, on ne pourrait en mettre que 15 sur un CD-ROM classique.

Grâce aux mathématiques, on peut réduire significativement la taille des photos sans perte perceptible de qualité.

Chaque photo numérique est composée de pixels. Si on considère, pour simplifier, des photos en noir et blanc, chaque pixel correspond à un des 256 niveaux de gris.
Ainsi, une photo est représentée par un large tableau de valeurs entre 0 (=noir) et 255 (=blanc). Les mathématiciens appellent celui-ci une matrice.

L'image 1 est composée de 512 x 512 pixels.

L'image 2 , un détail de l'œil de l'oiseau, est représentée par la matrice suivante :

89	96	94	101	101	104	107	109
103	104	100	99	106	111	111	109
105	99	104	101	105	114	120	118
92	101	98	105	98	81	65	69
95	98	95	70	35	10	9	13
91	101	88	24	10	9	8	6
99	93	58	12	9	9	4	5
102	81	28	11	4	2	0	1

Comment repère-t-on ce qui est dans l'image ? Sa structure est déterminée par les contours, c'est-à-dire, par des changements brutaux. Mathématiquement, cela correspond à une grande différence entre deux valeurs adjacentes dans la matrice. Mais en passant de deux valeurs à leur différence, on perd de l'information. On calculera donc également leur moyenne.

La méthode proposée consiste alors à remplacer deux valeurs a et b par $(a - b)/2$ et $(a + b)/2$. Par exemple, deux pixels adjacents de niveaux de gris 88 et 24 sont remplacés par les deux valeurs 32 et 56. La valeur plutôt élevée de 32 indique qu'il se passe quelque chose ici. On effectue ces calculs d'abord sur chaque ligne, ensuite sur chaque colonne.

Passons à l'étape cruciale : nous allons supprimer toutes les petites différences, c'est-à-dire qu' on les remplacera par 0. Ainsi, des petites fluctuations dans l'image sont supprimées, tout en gardant les contours essentiels.

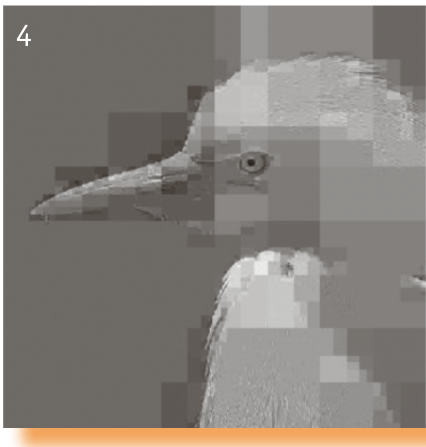
Les images 3 et 4 sont basées sur seulement 5% et 2% des données. La procédure décrite résulte d'un travail du mathématicien Alfred Haar de 1909.

En 1988, la mathématicienne belge Ingrid Daubechies a proposé une amélioration significative de la méthode de Haar, voir l'image 5. Son travail, qui est mondialement reconnu, lui a valu le poste de professeur à l'université de Princeton. Les mathématiques améliorent notre vie, même quand on ne s'y attend pas...

Une aigrette (512 x 512 pixels)

Un détail de l'œil (8 x 8 pixels)

Compression selon Haar à 5% des données



Compression selon Haar à 2% des données

Compression selon Daubechies à 2% des données

De la cryptographie dans ma carte de banque

La** cryptographie **est l'art d'envoyer et de recevoir des messages secrets. Au départ, c'est une question concernant l'armée et les services secrets.

Aujourd'hui, la cryptographie ne se limite plus au domaine militaire mais est devenue absolument indispensable pour tout le système bancaire et le commerce électronique : lorsque tu retires de l'argent d'un distributeur, la machine envoie au siège central de la banque tous les codes gravés dans la puce de ta carte et ton code de quatre chiffres. Quiconque intercepterait ces données pourrait vider ton compte. La même chose pourrait arriver lors d'un achat sur internet.

Tout le développement du commerce électronique a été rendu possible par l'invention en 1977 d'un système de codage tout à fait sûr, basé sur les nombres premiers : la cryptographie RSA (du nom de ses inventeurs Rivest, Shamir et Adleman).

En simplifiant un petit peu, voici comment elle fonctionne :
1° La personne (ou la banque) qui veut *recevoir* des messages choisit deux très grands nombres premiers, de plus de cent vingt chiffres. Ces deux nombres sont sa clé secrète, et elle ne les dévoile jamais.
2° Ensuite, elle fait le produit des deux nombres et affiche ce produit sans limitation, c'est sa clé publique.
3° Lorsque quelqu'un veut lui envoyer un message, il commence par le transformer en un nombre (par exemple en attribuant un numéro à chaque lettre, ponctuation, etc). Et toute l'astuce de la théorie est qu'il peut crypter le message (càd en faire un message secret) en n'utilisant que la clé publique (le produit des deux nombres). Par contre, cette clé ne permet pas de décrypter le message. Pour cela il faut la clé secrète (les deux nombres), connue seulement du destinataire.

Les calculs sont simples à faire, en utilisant un théorème obtenu par Fermat en 1640 ! Il suffit d'ailleurs de se procurer un logiciel tout fait.
Mais tu pourrais objecter que le grand nombre (connu de tous) se factorise de manière unique en les deux nombres premiers (la clé secrète). Ne peut-on pas simplement les calculer ?
La réponse est que *tous les ordinateurs actuels travaillant ensemble mettraient plusieurs siècles pour le faire, à cause de la taille des nombres !*

Tant qu'on n'invente pas une méthode énormément plus rapide pour factoriser un très grand nombre, le système est sûr. La clé secrète ne doit être communiquée à personne, et ne risque donc pas d'être interceptée. Tout le reste (la clé publique et tous les messages envoyés) peut être connu de tous, cela n'a aucune importance.

Plus d'infos sur
www.discmath.ulg.ac.be/mam/

Les rendez-vous cachés du nombre 97 avec les comptes en banque

Si on se trompe d'un chiffre en indiquant un numéro de compte en banque, le système bancaire détecte l'erreur. Comment est-ce possible ? Pourquoi le numéro introduit par erreur n'est-il pas tout simplement le numéro de quelqu'un d'autre ?

Prenons le numéro de compte de douze chiffres 123-4567890-02. En fait, le numéro de compte est seulement 1234567890 et les deux derniers chiffres forment le reste de la division par 97 de ce nombre de dix chiffres.

Vous savez ? 17 divisé par 3 fournit un quotient égal à 5 et un reste égal à 2 :
17 = (3 x 5) + 2.
Et on a aussi :
20 = (3 x 6) + 2 ou 23 = (3 x 7) + 2, etc.
Le reste de la division par 3 est le même précisément quand les deux nombres divisés diffèrent par un multiple de 3.

Il en est de même pour les comptes en banque, en divisant cette fois par 97 :
1234567890 = (97 x 12727504) + 2
d'où le numéro 123-4567890-02, avec 02 comme « nombre de contrôle ».
Pour que le système bancaire ne détecte pas une erreur dans les dix premiers chiffres, il faudrait que le reste de la division par 97 soit le même, pour le *bon* numéro et le *mauvais* numéro, donc que les deux numéros diffèrent par un multiple de 97.

Imaginons que vous ayez mal frappé l'un des chiffres. Par exemple, 123-4767890-02 au lieu de 123-4567890-02.
La différence entre les deux nombres est particulièrement simple :
1234767890 – 1234567890 = 200000.
En fait, quelle que soit l'erreur, la différence entre les deux nombres sera toujours du genre 3000, 200000000, 7, 100, etc., c'est-à-dire un chiffre, suivi (ou pas) d'un certain nombre de zéros. Un tel nombre n'est jamais divisible par 97 parce que 97 est un nombre premier et parce qu'une différence de la forme indiquée n'a comme facteurs premiers possibles que 2, 3, 5, 7, et donc pas 97.

Évidemment, des erreurs plus nombreuses peuvent échapper au système, par exemple si on ajoute 97 au numéro de compte.

LES NOMBRES PREMIERS

Un nombre entier positif est premier s'il est supérieur ou égal à 2 et n'a comme diviseurs que 1 et lui-même.

Ainsi 6 n'est pas premier parce que 6 = 2 x 3. Par contre 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ... sont premiers.
Un théorème simple dit que tout nombre entier positif à partir de 2 est un produit de nombres premiers, et de façon unique. Ainsi, 84 = 2 x 2 x 3 x 7, et aucune autre décomposition n'est possible.

Les intégrales aux rayons X

En 1895, Roentgen découvre les rayons X et, grâce à leur pouvoir de pénétration dans les tissus biologiques, réalise la première radiographie : une image de la main de son épouse (ci-dessous).
Il ouvre la voie à la radiologie médicale qui se développera rapidement notamment lors de la première guerre mondiale.

1

En première approximation, un faisceau de rayons X se propage le long d'une droite L et son intensité est atténuée après passage à travers les tissus.

On mesure ainsi *l'intégrale de ligne* du coefficient d'atténuation μ le long de la droite L. Ce paramètre μ est lié à la densité des tissus et est utilisé par le radiologue pour établir son diagnostic.

Mais différents organes situés le long du faisceau L sont superposés dans le cliché radiographique, limitant son pouvoir diagnostique. Le principe de la *tomographie* est de prendre des radiographies le long de plusieurs directions (selon plusieurs angles), et de combiner ces mesures de manière à reconstruire une image de μ en chaque point de l'organe étudié.

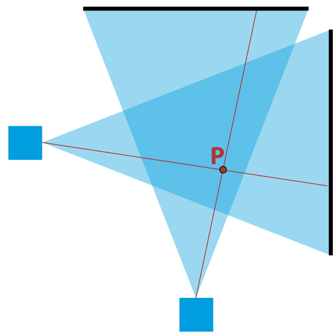
Dans le cas simple d'un objet ponctuel, on voit facilement (fig. 2) que deux angles de vue suffisent pour localiser l'objet P sans ambiguïté, de manière similaire à la radiogoniométrie (voir ci-dessous).

Pour un objet complexe, on doit prendre de nombreuses vues (typiquement 1000) en faisant tourner la source de rayons X et le détecteur autour du patient (fig. 3).

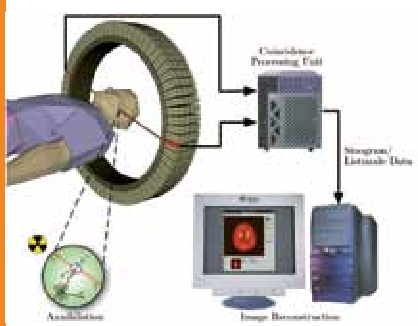
Mathématiquement, le problème consiste alors à calculer une fonction $\mu(x,y)$ à partir de ses intégrales mesurées le long de toutes les droites L qui traversent une coupe de l'organe étudié.
Ce beau problème mathématique a été résolu en 1917 par Johann Radon, mais l'application pratique a dû attendre le développement des ordinateurs, avec le premier tomographe ("scanner") réalisé par Hounsfield et Cormack en 1972.

La figure 4 montre une coupe tomographique de cerveau reconstruite avec un tomographe moderne.

2



3



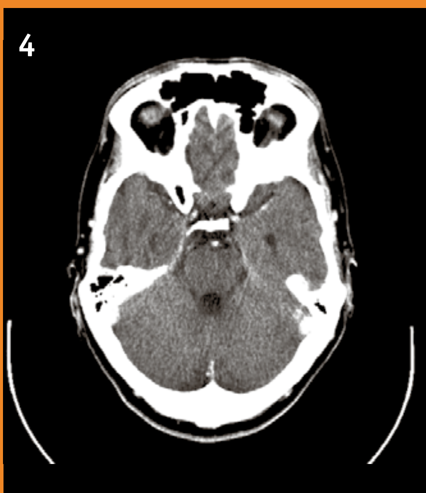
À propos des nombres premiers
LA CONJECTURE DE GOLDBACH

De façon étonnante, des questions d'apparence tout à fait élémentaires sur les nombres premiers ne sont pas résolues aujourd'hui.

Ainsi, en 1742, le mathématicien Christian Goldbach écrivait une lettre au grand Leonhard Euler, dans laquelle il affirmait que *tout nombre entier pair à partir de 4 s'écrit comme la somme de deux nombres premiers.*
Par exemple : 4 = 2 + 2 ; 6 = 3 + 3 ; 8 = 3 + 5 ; 10 = 5 + 5 et aussi 3 + 7 ; 389 965 026 819 938 = 5 569 + 389 965 026 814 369, etc.

Avec le développement des ordinateurs, on peut vérifier cette propriété pour des nombres gigantesques, *mais on ne pourra jamais la vérifier pour tous les nombres pairs, puisqu'il y en a une infinité.*
Ce qu'il faut, c'est une démonstration. Et on attend depuis 1742 qu'un mathématicien ait des idées nouvelles pour prouver cette affirmation.
Un tel énoncé, que l'on pense être vrai sans pouvoir le démontrer est appelé une conjecture.
Celle-ci, la conjecture de Goldbach, est une des plus anciennes qui résiste aux assauts de nombreux mathématiciens.

4



La **radiogoniométrie** est la détermination de la direction d'arrivée d'une onde électromagnétique.
La radiogoniométrie a deux applications principales :
- en navigation : la radiogoniométrie d'un émetteur fixe et connu (un radiophare ou une radiobalise) permet de déterminer un lieu de position pour le récepteur et, par conséquent, une position en relevant au moins deux émetteurs.
- en guerre électronique : la radiogoniométrie d'une émission hostile (radar, radio, autodirecteur de missile) permet de localiser cet émetteur soit en employant plusieurs récepteurs en des positions différentes, soit par calcul en fonction de la cinématique propre du récepteur.

(wikipédia)

Les équations différentielles

Vers 1675, Newton et Leibnitz ont simultanément inventé les notions de dérivée et d'intégrale d'une fonction $y=f(x)$.
Un objectif principal était d'étudier des équations différentielles, qui apparaissent dans un nombre impressionnant d'applications des mathématiques.

Dans ces équations, l'inconnue est une fonction $y=f(x)$, et l'équation est une relation entre cette fonction et certaines de ses dérivées.
Comme d'habitude, notons $f'(x)$ la dérivée de la fonction $f(x)$ au point x. Elle représente le taux de variation de f au point x, et on sait comment la calculer pour chaque fonction $f(x)$. Par exemple, la dérivée de la fonction $y=sin(x)$ est la fonction $y=cos(x)$.
$f'(x)$ est une nouvelle fonction de x, et on note $f''(x)$ sa dérivée, appelée dérivée seconde de $f(x)$.

Par exemple,

$$f''(x) + f(t) = 0$$

est une équation différentielle, et ses solutions sont toutes les fonctions

$$f(x) = \mathrm{A}.\cos(x) + \mathrm{B}.\sin(x)$$

où A et B sont n'importe quels nombres.

Parlons de physique

Bien souvent, la variable intéressante est le temps, et on la notera alors t au lieu de x.
Si $f(t)$ représente la position d'un point mobile à l'instant t, la loi de Newton qui définit toute la mécanique classique dit que F = $m.a$, càd que la force qui agit sur lui est le produit de sa masse par son accélération.

Si $f(t)$ est la position du point, $f'(t)$ représente sa vitesse (la variation de la position), et $f''(t)$ représente son accélération (la variation de sa vitesse).

L'équation F = $m.a$ est une équation différentielle, puisque $a = f''(t)$, et la force F dépend du temps t, de la position du point $f(t)$, peut-être de sa vitesse $f'(t)$.

On a une bonne idée de cette équation en voiture. Si on appuie sur l'accélérateur, le moteur fournit une force et la voiture accélère en proportion de cette force. Si la voiture est plus lourde, il faudra une plus grande force pour donner la même accélération : a = F/m.

On se dit donc qu'on pourrait résoudre tous les problèmes de la physique en résolvant les équations différentielles. Mais il y a un hic : dès que l'équation est un peu compliquée, on ne peut pas trouver de formule donnant les solutions de l'équation.

Si on étudie le mouvement d'une seule planète autour d'une étoile, pas de problème : sa trajectoire est une ellipse et l'étoile est à un des ses foyers (c'est ce qu'on appelle le problème des deux corps).
Mais dès qu'on parle de trois corps, ils peuvent avoir des trajectoires tellement compliquées qu'aucune formule ne peut exister.

On doit alors soit calculer des solutions approximatives (par l'usage d'ordinateurs), soit comprendre des propriétés des solutions sans les connaître vraiment. Les deux approches sont utilisées couramment.

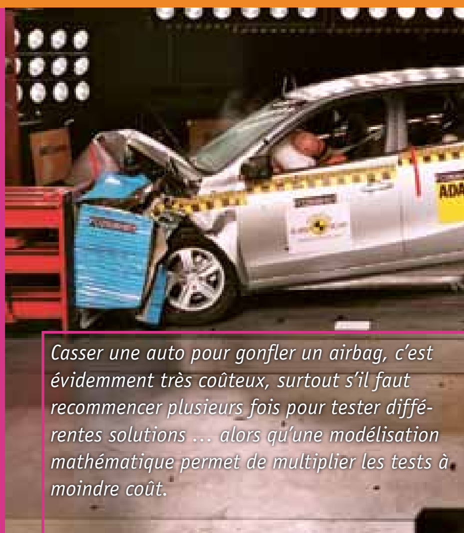
Les airbags

Venons en aux airbags qui se gonflent au moment d'un accident de voiture et sauvent ainsi de nombreuses vies.
Il s'agit d'injecter un gaz dans l'airbag à très grande vitesse : si l'airbag n'est pas gonflé en un vingtième de seconde, il arrive trop tard.
Tout compte : la forme du sac, la manière dont il est plié et la manière dont le gaz est injecté.

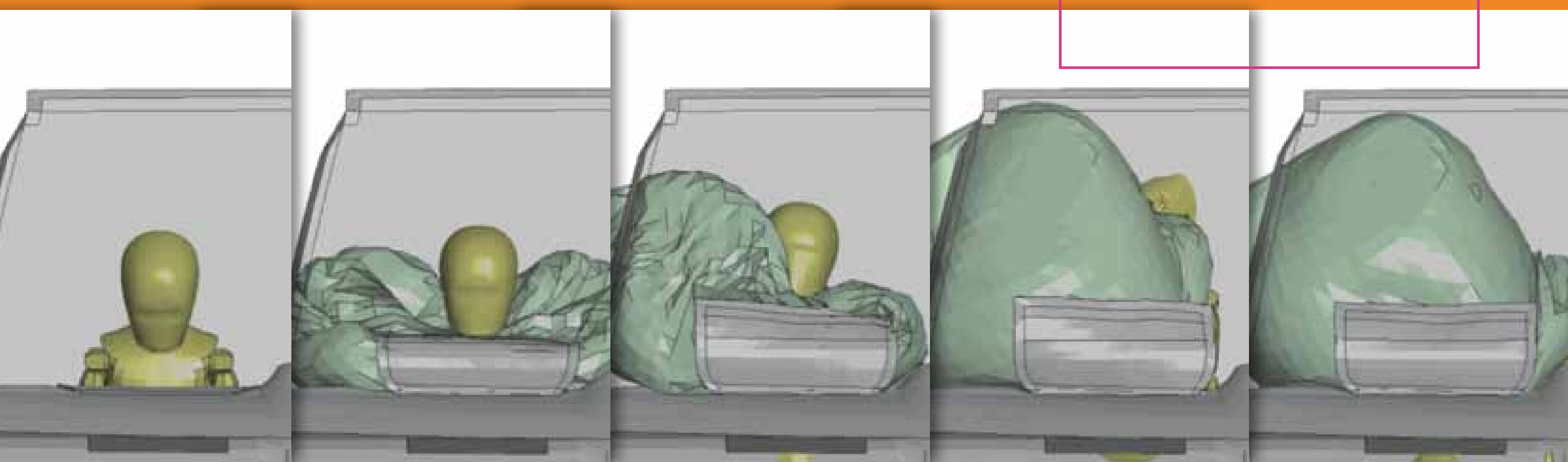
À nouveau, le problème est difficile car il ne s'agit pas d'un gaz se déplaçant dans un réservoir fixé : la paroi du sac bouge très vite, poussée par le gaz et poussant le gaz aussitôt.

La manière la plus efficace, et la moins coûteuse par la même occasion, est un modèle mathématique traité par un ordinateur.
Les mathématiciens, travaillant avec des informaticiens, ont développé un programme qui permet de tester la forme du sac, la manière dont il est plié et l'entrée du gaz sans devoir réaliser un airbag réel. Pour un coût minime, ils peuvent faire des centaines d'« expériences » sur la forme et les plis pour trouver le meilleur airbag possible, pour ensuite le construire réellement.

Et la comparaison du déroulement du programme et de la réalisation matérielle de l'airbag faite à la fin montre combien leur programme est précis.



Casser une auto pour gonfler un airbag, c'est évidemment très coûteux, surtout s'il faut recommencer plusieurs fois pour tester différentes solutions … alors qu'une modélisation mathématique permet de multiplier les tests à moindre coût.



La sonde spatiale Voyager 2

La sonde Voyager 2 est un des grands succès de l'aventure spatiale, et un concentré de mathématiques.
Lancée en 1977, elle est passée près de Jupiter en 1979, de Saturne en 1981, d'Uranus en 1986, et de Neptune en 1989.
Elle a aujourd'hui parcouru 14 milliards de kilomètres, le tout avec une quantité de carburant forcément très faible.

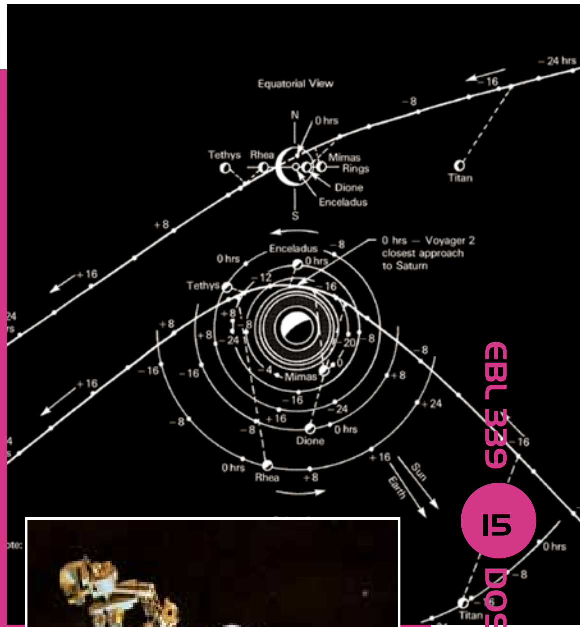
Pour la diriger, on utilise l'équation de Newton : $F=m.a$ (force égale masse fois accélération) et on se sert du passage près de chaque planète pour catapulter la sonde vers la suivante. On ne peut pas calculer exactement la solution de l'équation différentielle de Newton, mais on peut l'approcher (de très près) par des calculs informatiques. Il s'agit chaque fois de faire passer la sonde à la bonne altitude au-dessus d'une planète, pour que la force d'attraction l'envoie vers la planète suivante.

Mais les mathématiques n'apparaissent pas que dans le contrôle de la trajectoire.
Voyager 2 a envoyé des milliers de photos des quatre planètes et de leurs satellites, et continue à envoyer des données qui mettent treize heures à nous parvenir, à la vitesse de la lumière.

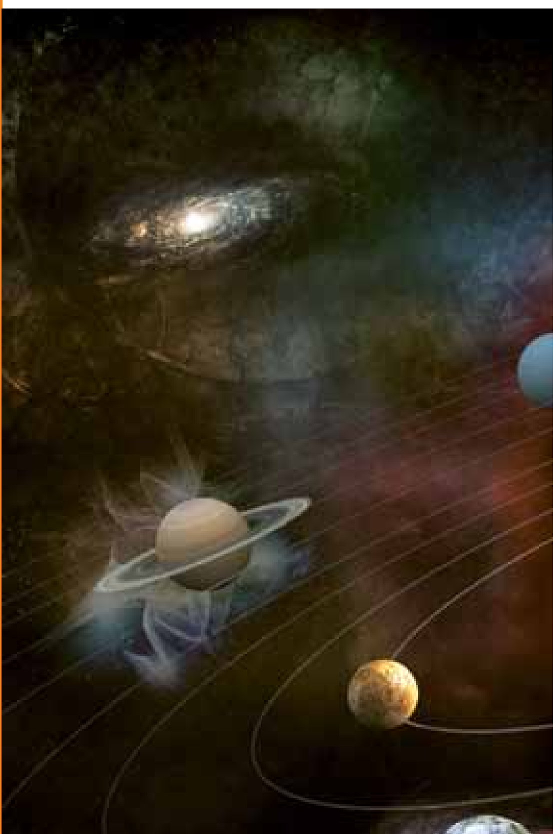
Pour envoyer les photos, elle fait appel à des programmes de compression d'image et de correction d'erreurs, dont nous avons parlé.

Il faut voir aussi que l'ordinateur de la sonde (qui continue à envoyer des données) date de 1977 : c'est un très vieil ordinateur, complètement dépassé, mais c'est le seul qu'elle ait ! Au cours des années, on lui a constamment envoyé de nouveaux programmes, mis au point bien après son départ.

Pour suivre la mission en temps réel et voir d'autres photos, le site officiel est : http://voyager.jpl.nasa.gov/



La Terre sans la Lune : un bilboquet !



On s'est demandé, depuis la fin du XIXe siècle, si notre système solaire était stable, autrement dit si ses planètes continueraient indéfiniment à tourner sur les mêmes orbites ou si l'une d'entre elles pourrait être éjectée du système solaire. Si, par exemple, la Terre est déviée légèrement chaque fois qu'elle est proche de Mars, pourrait-elle à la longue être envoyée dans l'espace (ce ne serait pas pour demain, rassure-toi) ?

C'est de nouveau une question liée à l'équation de Newton $F = m.a$, mais sur une très longue durée, ce qui rend les calculs très difficiles.
Ce n'est que depuis 1990 que des calculs innovants sur des ordinateurs ont donné des réponses.

Ainsi, les quatre grosses planètes de notre système solaire (Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune) ont des orbites stables.
Les quatre planètes intérieures (Mercure, Vénus, la Terre, Mars) ont des orbites instables, càd qu'une différence de position d'un centimètre aujourd'hui pourrait donner un écart d'un million de kilomètres dans 200 millions d'années !

Et bien entendu, il est impossible de mesurer la position des planètes à un centimètre près, et donc de prévoir leurs positions futures à un million de kilomètres près.
Le système solaire est vieux de cinq milliards d'années, et à côté de cela 200 millions d'années est une durée assez petite.

Mais le modèle mathématique utilisé pour ces calculs réserve une autre surprise. Tant qu'à faire des calculs sur le modèle des planètes, on peut voir ce qui se passerait si la Lune n'existait pas (il suffit de ne pas la mettre dans le modèle).
Et bien, sans la Lune, l'axe de la Terre serait très instable. Au lieu de rester à 23°30' comme aujourd'hui, avec des saisons régulières, les tropiques et les cercles polaires bien en place, l'axe pourrait varier de 0 à 60 degrés en deux millions d'années !

Si cela avait été le cas, on peut imaginer que la vie ne se serait pas développée de la même façon sur Terre, voire pas du tout.
Merci la Lune !

Plus d'info :
www.ulb.ac.be/facs/sciences/math/rech-math.html

Équations à cœur ouvert !

Le mouvement d'un fluide (un liquide ou un gaz) est déterminé par des équations différentielles écrites en 1822 par les mathématiciens-physiciens Navier et Stokes. Comme ces équations doivent représenter aussi bien le clapotis de l'eau dans un étang que les turbulences de l'air sortant du réacteur d'un avion, on se doute bien qu'il n'est (une fois de plus) pas possible d'écrire des formules donnant les solutions.

Comme toujours, on cherche des approximations de solutions dans des cas particuliers ou des propriétés générales des solutions.
Mais venons-en au système cardiovasculaire, composé du cœur, des artères et des veines. Il contient le sang, qui se déplace, poussé par les contractions du cœur mais aussi des artères, et qui à son tour exerce une pression sur ceux-ci.
C'est un problème de fluide, donc régi par les équations de Navier-Stokes, mais la complication est augmentée par l'interaction entre le sang et les parois, ce qui amène d'autres équations sur la forme du coeur et des artères.

Un modèle mathématique, traité sur ordinateur, permet de montrer le comportement du système en fonction de sa forme.
Ceci a (ou aura bientôt) des applications à la chirurgie cardiaque. Avant de faire par exemple un pontage (càd le remplacement d'un morceau d'artère par un tuyau artificiel), on pourra visualiser le résultat obtenu en fixant le tuyau de différentes façons, de manière à éviter que le sang sortant du tuyau ne provoque une hernie un peu plus loin.

Avant même l'opération, on devrait donc disposer d'informations extrêmement utiles.

Le temps de demain et du siècle prochain

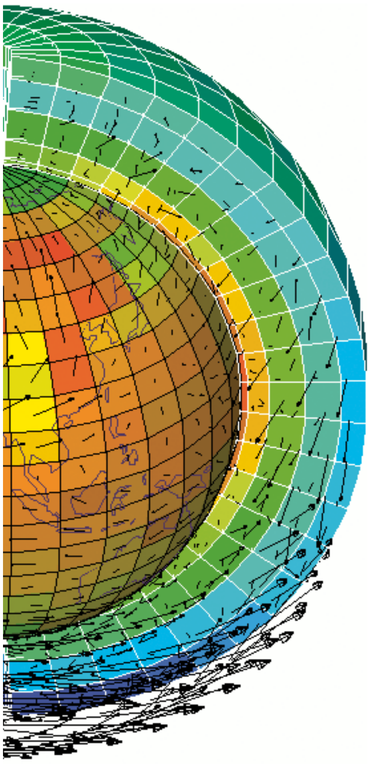
Les prévisions du temps également font un appel massif à des équations mathématiques. Pour prévoir le temps qu'il fera dans quelques jours, on utilise des équations différentielles du type de celles de Navier – Stokes, mais impliquant de nombreuses données : la température, la vitesse du vent, la pression atmosphérique, l'humidité...

La variation de ces données (càd leur dérivée) est déterminée par un grand système d'équations différentielles, tellement complexe qu'on ne peut évidemment pas en écrire les solutions. Il faut donc le simplifier pour qu'un ordinateur puisse en donner des solutions suffisamment exactes.

Pour cela, on imagine que l'atmosphère terrestre est divisée en blocs de quelques dizaines de kilomètres de longueur et largeur et de quelques centaines de mètres de hauteur.
On suppose que la température, la vitesse du vent, etc. n'ont qu'une seule valeur dans chaque bloc, ce qui fait qu'on n'a plus à traiter qu'un nombre fini de données, ce qu'un ordinateur suffisamment puissant peut faire ... jusqu'à un certain point.
Les progrès de la météorologie sont donc liés en partie à l'augmentation de la puissance des ordinateurs.
Mais c'est plus compliqué que cela.

On sait que les équations météorologiques ont un caractère appelé chaotique, càd qu'une petite variation des données aujourd'hui peut donner une très grande variation dans quinze jours. Et on ne peut pas connaître toutes les données partout dans l'atmosphère avec une grande précision.
Il y aura donc toujours une limite aux prévisions du temps. Si on peut faire des prévisions à 4 ou 5 jours pour le moment, les spécialistes estiment qu'il sera impossible de dépasser 15 jours.

Mais que dire alors des prévisions de changements climatiques, en relation notamment avec les émissions de CO_2 pour les cinquante prochaines années ?
Les méthodes employées sont encore plus compliquées : il faut ajouter dans les équations l'état des glaces polaires, l'effet des gaz à effet de serre et des grands courants marins.
Mais on ne veut pas connaître la température à Bruxelles le 30 janvier 2050 : on veut seulement connaître la température moyenne de la terre aux environs de 2050. Les méthodes utilisées offrent de très bonnes garanties sur les estimations faites, eh oui : il faut diminuer fortement la production de gaz à effet de serre si on veut éviter un réchauffement climatique qui pourrait amener des problèmes catastrophiques.



UN MATHÉMATICIEN HORS NORMES

SRINIVASA RAMANUJAN (1887-1920)

Srinivasa Ramanujan naît en Inde en 1887. Surdoué des mathématiques, il ne s'intéresse pas aux autres matières, ce qui fait qu'il rate sa première année d'université et perd la bourse qui lui aurait permis de continuer. Pour gagner sa vie, il devient employé au bureau des douanes de Madras.

Pendant tout ce temps, guidé par sa seule intuition, il remplit des carnets de centaines de formules mathématiques. Mais lorsqu'il pense qu'une formule est correcte, il ne voit pas la nécessité de la démontrer et ses carnets ne comprennent aucune preuve.
Voulant entrer en contact avec les mathématiciens de son époque, il rassemble une centaine de ses formules et les envoie avec une lettre d'accompagnement à plusieurs mathématiciens anglais.
Or, ses formules sont soit fausses, soit bien connues, soit incompréhensibles et non démontrées.

Plusieurs mathématiciens ne lui répondent simplement pas, mais Geoffrey Harold Hardy perçoit une trace de génie dans certaines des formules. Il réussit à convaincre Ramanujan de le rejoindre à Cambridge, et ils s'y retrouvent en 1914.
Ils travaillent ensemble jusqu'en 1919, mais la santé de Ramanujan se détériore et il retourne en Inde où il meurt prématurément en 1920.

Le sujet de prédilection de Ramanujan et de Hardy est la théorie des nombres premiers. Cela peut sembler simple, mais les questions qu'ils se posent sont en fait très difficiles, et beaucoup ne sont pas résolues aujourd'hui (comme la conjecture de Goldbach).
Bien souvent, l'étude des nombres premiers passe par des formules extrêmement compliquées, faisant intervenir le nombre *pi*, les nombres complexes, les dérivées de fonctions, les exponentielles en base e...
C'est un peu la magie des mathématiques qui lie des sujets entièrement distincts comme la suite des nombres premiers d'une part, et la longueur d'un cercle, via le nombre pi d'autre part.

Hardy et Ramanujan travaillent ensemble et arrivent à démontrer une série de théorèmes importants, mais Ramanujan laisse également ses fameux carnets, remplis de formules non démontrées.
Il introduit notamment une fonction liée aux nombres, appelées *fonction tau*, et énonce une conjecture sur les propriétés de cette fonction (une conjecture est un résultat que l'on croit vrai, mais sans démonstration).

Cette conjecture est devenue une question clé dans une théorie générale, et a été démontrée par le bruxellois Pierre Deligne en 1974. En 1978, pour l'ensemble de ses travaux, il obtenait la Médaille Fields (souvent appelée le Nobel des mathématiques).

Un groupe de mathématiciens autour de l'américain Bruce Berndt a ensuite passé des années à étudier les carnets de Ramanujan, et a publié sept gros volumes et plus de 150 articles de formules démontrées, de 1985 à aujourd'hui.
Il faut dire que l'intérêt pour Ramanujan a été relancé en 1976, lorsqu'on a retrouvé un de ses carnets dans une cave de l'université de Cambridge. Rapidement baptisé « le carnet perdu de Ramanujan », il a passionné les mathématiciens pour les nouvelles formules qu'on y a trouvées.

Qui sait s'il resterait un autre carnet, dans une autre cave, avec de nouvelles formules inconnues et non démontrées ?

Luc Lemaire, professeur à l'ULB

Quelques url pour en savoir plus :

fr.wikipedia.org/wiki/Srinivasa_Ramanujan

www.les-mathematiques.net/histoire/histoire_rama.php

http://www.futura-sciences.com/fr/news/t/mathematiques-1/d/mathematiques-de-mysterieuses-formules-dues-a-ramanujan-enfin-elucidees_10460/

en.wikipedia.org/wiki/Ramanujan%27s_lost_notebook

Où mènent les études de maths ?

Les diplômes de master en math mènent à un vaste éventail de professions : dans le privé (banques, assurances, industrie pharmaceutique) ; au FNRS ou à l'université comme enseignant et chercheur ; comme professeur dans les écoles secondaires.

Nous avons demandé à quatre jeunes mathématiciens pourquoi ils (ou elles !) avaient choisi les études de mathématiques et ce qu'ils faisaient aujourd'hui.

Luc Lemaire, professeur à l'ULB

Céline Azizieh
Consultante indépendante
Licence en maths en 1997, doctorat en 2001, licence en actuariat en 2002

J'ai choisi les études de maths principalement par goût, et je n'ai pas été déçue à l'université. Je n'ai pas trop réfléchi à ce que je pourrais faire avec ces études, je sentais juste que cela me mènerait à un travail intéressant. À l'image que j'avais des ingénieurs, je préférais de loin celle des mathématiciens ou physiciens rêveurs, et j'ai choisi les maths.

Dans mon travail, j'utilise la théorie des processus probabilistes afin d'évaluer les risques encourus par les banques et compagnies d'assurance, ou afin de déterminer des prix de produits optionnels (options). Je suis consultante free lance depuis 6 ans, ce qui me donne beaucoup de liberté pour proposer et implémenter des modèles. Ceci m'amène souvent à retourner vers des recherches théoriques, qui s'appliquent immédiatement. Je fais donc un travail de mathématicien appliqué dans un domaine où relativement peu de gens travaillent.

Pierre-Emmanuel Caprace
Chercheur qualifié au Fonds National de la Recherche Scientifique (FNRS)
Licence en maths en 2003, Doctorat en 2005

Le choix des études de mathématiques ne fut pas facile. J'aimais toutes les branches. Je consacrais en outre une partie importante de mon temps à ma passion pour la musique, que je cultive encore à l'heure actuelle. Ce sont sans doute mes résultats aux olympiades de mathématiques et l'idée de trouver une profession libérée de toute contrainte de rendement économique qui m'ont orienté vers les mathématiques, plutôt que les études d'ingénieur que me recommandait mon prof de maths à l'époque.
Mes recherches sont très liées à la géométrie : tantôt j'étudie les symétries d'objets abstraits encore peu connus, tantôt je cherche des structures géométriques cachées dans des objets algébriques.
Durant mes études, et plus tard dans le métier de chercheur, j'ai pu rester fidèle à mon idéal tout en régalant mon sens esthétique des merveilles souvent insoupçonnées de l'univers mathématique. L'immensité des territoires inexplorés en mathématiques me fascine !

Anne Sumbul
Expert biostatisticienne chez GlaxoSmithKline Biologicals
Diplôme en maths en 2007

Ayant le souci du détail et aimant les problèmes de logique, je me suis dirigée vers les études de mathématiques dans l'idée d'apprendre la rigueur qui me permettrait d'analyser au mieux n'importe quelle situation. Le nombre réduit d'étudiants y permettait de tisser une vraie relation entre professeurs et étudiants.
Je travaille dans un grand groupe pharmaceutique comme responsable statistique pour plusieurs candidats vaccins. En effet, mettre un nouveau vaccin sur le marché nécessite de le concevoir, puis de prouver qu'il est efficace et sans danger. Ce travail fait appel aux biologistes, chimistes, médecins, informaticiens,... et aux mathématiciens–statisticiens.
C'est un métier très varié, et j'ai la chance de travailler avec des personnes qui viennent des quatre coins du monde.

Myline Trinh
Analyste quantitatif chez AXA
Licence en maths en 2004

Les maths m'ont toujours attirée et j'ai choisi ces études car elles mènent à de nombreux domaines qui m'intéressent (la physique, l'informatique, les probabilités,...).

Je m'occupe chez AXA de mesurer l'impact des risques financiers et de protéger la compagnie contre ces risques.

Un exemple : quand les taux d'intérêt baissent, des clients décident de rembourser leur prêt hypothécaire pour en acheter un autre plus intéressant ailleurs. Ceci fait perdre de l'argent à la banque. Elle peut s'en prémunir en achetant à l'avance des produits financiers compensant une partie de ces pertes. L'estimation de ce risque et des montants à investir pour se protéger requiert l'utilisation de méthodes probabilistes précises.

Ce métier est diversifié et valorisant pour ceux qui aiment les maths.