

§ 2. МОНОТОННІСТЬ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ. ПАРНІ ТА НЕПАРНІ ФУНКЦІЇ

3. Неперервність функції

Будемо називати функцію *неперервною на деякому проміжку*, якщо її графік на цьому проміжку – неперервна лінія.

Будемо казати, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці x , якщо ця точка належить деякому проміжку, на якому функція $y = f(x)$ є неперервною. Функція $y = \frac{6}{x}$ є неперервною, наприклад у точці $x = -8$, адже ця точка належить проміжку $(-\infty; 0)$, на якому функція $y = \frac{6}{x}$ неперервна, та в точці $x = 5$, адже ця точка належить проміжку $(0; +\infty)$, на якому функція $y = \frac{6}{x}$ також є неперервною.

У точці $x = 0$ функція $y = \frac{6}{x}$ не є неперервною, адже ця точка не належить жодному з проміжків $(-\infty; 0)$ або $(0; +\infty)$, на яких функція неперервна. У такому разі кажуть, що в точці $x = 0$ функція $y = \frac{6}{x}$ має розрив, а точку $x = 0$ при цьому називають точкою розриву.

Зауважимо, що всі відомі нам функції, які задаються однією формулою, неперервні в кожній точці своєї області визначення, оскільки їх графіки на кожному з проміжків області визначення – неперервні лінії. Це зауваження дає можливість досліджувати нескладні функції на неперервність та точки розриву без побудови їх графіків.

Задача 5. Дослідити функцію $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$ на неперервність і точки розриву.

Розв'язання.

$$\mathcal{D}(f) : \begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &\neq 0 \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

За м. Вієта

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

$$x \neq -3, x \neq 1$$



$$D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; +\infty).$$

Отже, $f(x) \in$ неперервною на кожному з проміжків $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$, $(1; +\infty)$, а точки $x = -3$ і $x = 1 \in$ точки розриву.

Відповідь: $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$, $(1; +\infty)$ — проміжки неперервності, -3 і 1 — точки розриву.

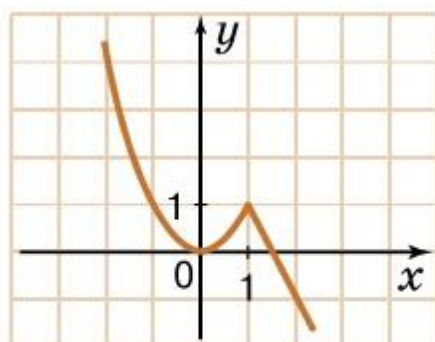
Задача

Дослідити на неперервність і точки розриву функцію.

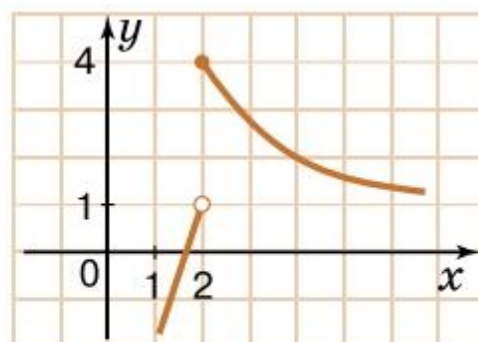
$$1) y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 1, \\ -2x + 3, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} 3x - 5, & \text{якщо } x < 2, \\ \frac{8}{x}, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

- Розв'язання. 1) Графік функції зображено на малюнку 2.8. Функція неперервна на $(-\infty; +\infty)$, точок розриву немає. 2) Графік функції зображено на малюнку 2.9. Функція неперервна на кожному з проміжків $(-\infty; 2)$ і $(2; +\infty)$, а в точці $x = 2$ має розрив.



Мал. 2.8



Мал. 2.9