

ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ.

1. Обчислення визначених інтегралів за формулою Ньютона–Лейбніца

За наведеним у попередньому параграфі означенням маємо:


$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Цю формулу називають *формулою Ньютона–Лейбніца*. Під час обчислення визначених інтегралів зручно різницю $F(b) - F(a)$ записувати так: $F(x)\Big|_a^b$. Використовуючи це позначення, формулу Ньютона–Лейбніца записують ще й у такому вигляді:


$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона–Лейбніца є однією з найважливіших у курсі математичного аналізу. За її допомогою обчислюють визначені інтеграли в тому разі, коли для підінтегральної функції $f(x)$ можна знайти первісну $F(x)$. Саме такі визначені інтеграли й розглядаються у школі. При цьому зауважимо, що умова $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a; b]$ не є обов'язковою; обов'язковою є лише неперервність функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Розглянемо приклади застосування формули Ньютона–Лейбніца.

Задача 1. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Розв'язання. Для функції $f(x) = \sin x$ однією з первісних є $F(x) = -\cos x$, тому за формулою Ньютона–Лейбніца маємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1.$$

Відповідь. 1.

Задача 2. Обчислити інтеграл $\int_{-1}^1 (2x - 3x^2) dx$.

Розв'язання.

$$\int_{-1}^1 (2x - 3x^2) dx = (x^2 - x^3) \Big|_{-1}^1 = (1^2 - 1^3) - ((-1)^2 - (-1)^3) = 0 - 2 = -2.$$

Відповідь. -2.

Задача 3. Обчислити інтеграл $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x+1}}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x+1}} &= \frac{1}{2} \sqrt{4x+1} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 2 + 1} - \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 0 + 1} = \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{9} - \sqrt{1}) = \frac{1}{2} (3 - 1) = 1. \end{aligned}$$

Відповідь. 1.