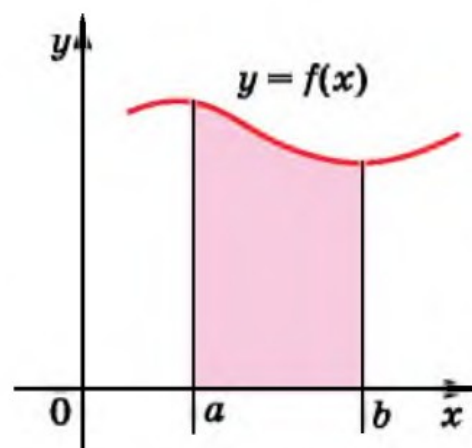


ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, ЙОГО ФІЗИЧНИЙ І ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ

Розглянемо задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла.

1. Приклади задач, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Задача 1 (про площу криволінійної трапеції). Нехай на проміжку $[a; b]$ осі абсцис задано неперервну функцію $y = f(x)$, яка на цьому проміжку набуває лише невід'ємних значень. Фігуру, обмежену графіком такої функції $y = f(x)$, віссю абсцис і прямими $x = a$, $x = b$, називають *криволінійною трапецією* (мал. 10.1).



Мал. 10.1

Кожна криволінійна трапеція має певну площу.
площу криволінійної трапеції можна знаходити за допомогою первісних.

Т **Теорема** (про площу криволінійної трапеції). Нехай $y = f(x)$ – функція неперервна на проміжку $[a; b]$, яка на цьому проміжку набуває лише невід'ємних значень, а $F(x)$ – первісна цієї функції на цьому проміжку. Тоді площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю абсцис і прямими $x = a$ і $x = b$, обчислюють за формулою:

$$S = F(b) - F(a).$$

! Різницю $F(b) - F(a)$ називають *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx$ (читають: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс»).

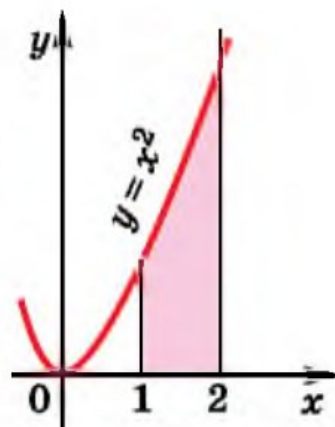
Під час обчислення різниці $F(b) - F(a)$ можна брати будь-яку з первісних для функції $f(x)$, які в загальному вигляді записують $F(x) + C$. Але $(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$. Тому прийнято застосовувати ту первісну, для якої $C = 0$.

Задача 2. Обчислити площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x) = x^2$ та прямими $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Розв'язання. Для функції $f(x) = x^2$ однією з первісних є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$ (мал. 10.5). Тоді шукана площа

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Відповідь. $\frac{7}{3}$.



Мал. 10.5

швидкість є похідною від координати за часом, тобто $v(t) = s'(t)$, то $s(t)$ – первісна для функції $v(t)$.

Таким чином, шлях, пройдений точкою, що рухається прямолінійно зі швидкістю $v = v(t)$ за інтервал часу $[a; b]$, зводиться до знаходження різниці $s(b) - s(a)$, де $s(t)$ – первісна для $v(t)$, тобто інтеграла $\int_a^b v(t) dt$.

Задача 4. Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 3t^2 + 1$ (м/с). Який шлях пройде матеріальна точка за перші 2 с після початку відліку часу?

Розв'язання. Маємо $s(t) = t^3 + t$ – один з можливих законів руху матеріальної точки. Тоді шуканий шлях

$$s = s(2) - s(0) = (2^3 + 2) - (0^3 + 0) = 10 \text{ (м)}.$$

Відповідь. 10 м.

2. Геометричний і фізичний зміст визначеного інтеграла

Ураховуючи попередній пункт, можна визначити геометричний і фізичний зміст визначеного інтеграла.

Геометричний зміст визначеного інтеграла полягає в такому:

! інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ від функції $y = f(x)$, яка неперервна на проміжку $[a; b]$ і набуває на цьому проміжку лише невід'ємних значень, є площею криволінійної трапеції, обмеженої графіком цієї функції та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$.

Геометричний зміст інтеграла можна використовувати під час знаходження визначених інтегралів у тому разі, коли первісну функції $y = f(x)$ знайти важко або неможливо, а площу фігури знайти легко за допомогою геометричних міркувань.

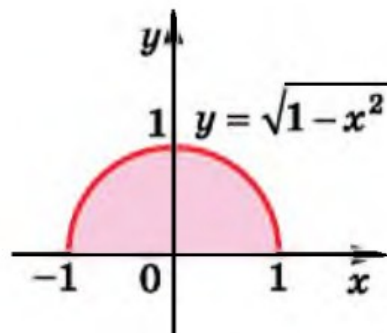
Задача 5. Використавши геометричний зміст інтеграла, об-

числити $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Розв'язання. Шуканий інтеграл дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = \sqrt{1-x^2}$ і $y = 0$ (мал. 10.6), тобто половині площі круга радіуса 1. Тому

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2}$.



Мал. 10.6

Фізичний зміст визначеного інтеграла полягає в такому:



інтеграл $\int_a^b v(t)dt$ є переміщенням за інтервал часу $[a; b]$ матеріальної точки, що рухається прямолінійно зі швидкістю $v = v(t)$.