

Елементи комбінаторіки. Розміщення. Перестановка. Комбінація

Комбінаторика - розділ математики, у якому вивчають способи вибору та розташування елементів з деякої скінченної множини, які відповідають певним умовам.

Вибрані (або вибрані та розташовані) групи елементів називають сполуками.

Комбінаторика вивчає такі сполуки: розміщення, перестановки, комбінації (сполучення) тощо.



1. Правило суми і правило добутку

Приклад 1. У ящику є 5 білих і 4 чорних кульки. Вибрати одну з кулек: білу **або** чорну, очевидно, можна $5 + 4 = 9$ способами.

правило суми:

! якщо деякий елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — r способами (причому будь-який вибір елемента A відрізняється від вибору елемента B), то вибрати A **або** B можна $m + r$ способами.

Приклад 2. У шкільній їдальні є вибір на обід із 4 перших страв і 3 других. Першу страву учень (учениця) може вибрати 4 способами і до кожної першої страви обрати другу страву 3 способами (мал. 14.1).



Отже, учень (учениця) має $4 \cdot 3 = 12$ способів, щоб вибрати собі обід.

правило добутку:

! якщо деякий елемент A можна вибрати m способами, а після кожного такого вибору інший елемент B можна вибрати (незалежно від вибору елемента A) r способами, то пару об'єктів A і B можна вибрати $m \cdot r$ способами.

2. Поняття факторіала

Важливим у комбінаториці є поняття *факторіала*.



Факторіалом числа n , де n — ціле невід'ємне число, називають добуток усіх натуральних чисел від 1 до n .

Позначають це так: $n!$ (читають: «ен факторіал»). Отже,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n.$$

За означенням приймають $0! = 1$.

Наприклад, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Задача 3. Спростити вираз $\frac{5!}{4!}$.

Розв'язання. *I спосіб.* $\frac{5!}{4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5.$

II спосіб. $\frac{5!}{4!} = \frac{4! \cdot 5}{4!} = 5.$

Відповідь. 5.

$$\frac{7!}{5!} = \frac{\cancel{5!} \cdot 6 \cdot 7}{\cancel{5!}} = 42$$

3. Розміщення

Цю формулу можна запам'ятати за допомогою такого правила:

 A_n^m – це добуток m натуральних чисел, починаючи з n , які записано в порядку спадання.

За отриманою формулою $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ (що збігається з раніше обчисленням); $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Якщо отриманий для A_n^m вираз помножити і поділити на $(n - m)!$, то одержимо ще одну формулу для обчислення:


$$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}.$$

4. Перестановки



Перестановкою з n елементів називають будь-яку впорядковувану множину з усіх цих елементів,

причому дві такі множини вважають різними, якщо вони відрізняються між собою порядком розташування елементів.

Кількість перестановок з n елементів позначають P_n (читають: «пе з ен»; P – перша літера від франц. слова *permutation* – перестановка).

З означення випливає, що $P_n = A_n^n$. Тоді, враховуючи формулу для A_n^m та $0! = 1$, маємо $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$.
Отже,



$$P_n = n!$$

5. Комбінації (сполучення)

Нехай дано множину X з n елементів $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$.

! Комбінацією (сполученням) з n елементів по m ($m \leq n$) називають будь-яку підмножину Y множини X , причому дві такі підмножини вважають різними, якщо вони відрізняються складом.

!
$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Задача 10. У вазі 7 червоних і 5 білих троянд. Скількома способами з вази можна вибрати: 1) 3 троянди; 2) 2 червоні й 1 білу троянду?

Розв'язання. 1) Оскільки порядок вибору не має значення, то вибрати 3 троянди з 12 можна C_{12}^3 способами:

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{\cancel{9!} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{3! \cdot \cancel{9!}} = \frac{10 \cdot 11 \cdot \cancel{12}^2}{1 \cdot \cancel{2} \cdot 3} = 220.$$

2) Дві червоні троянди можна вибрати C_7^2 способами, а одну білу – C_5^1 способами. Тому дві червоні й одну білу троянду можна вибрати $C_7^2 \cdot C_5^1$ способами. Маємо:

$$C_7^2 \cdot C_5^1 = \frac{7!}{2!(7-2)!} \cdot \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{2! \cdot 5!} \cdot \frac{4! \cdot 5}{1 \cdot 4!} = 21 \cdot 5 = 105.$$

Відповідь. 1) 220; 2) 105.



Якщо порядок розташування елементів має значення, то маємо розміщення, якщо ні – комбінації.

Розглянемо задачу-схему.

У класі навчається 30 дітей. Скількома способами із цього класу можна вибрати...	
...старосту і його заступника?	...двох чергових?
Обов'язки різні! Порядок має значення $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$	Обов'язки однакові! Порядок не має значення $C_{30}^2 = \frac{30!}{2!(30-2)!} = \frac{28! \cdot 29 \cdot 30}{2 \cdot 28!} = \frac{870}{2} = 435$

14.13. Скількома способами можна вибрати пару з літер на позначення одного голосного й одного приголосного звука у слові «яблуко»?

$$P_1 = 3, \quad P_2 = 3$$

$$3 \cdot 3 = 9$$

14.15. Скількома способами можна вишикувати в ряд 5 дітей?

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

14.17. Скількома способами із 6 членів президії можна вибрати голову і секретаря зборів?

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$$

14.19. У групі туристів 16 осіб. Скількома способами можна сформувати з них групу з 3 туристів для екскурсії?

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} ; \quad C_{16}^3 = \frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{16!}{3! \cdot 13!} = \frac{\cancel{13!} \cdot \overset{7}{\cancel{14}} \cdot \overset{5}{\cancel{15}} \cdot 16}{\cancel{13!} \cdot \underset{1}{\cancel{1}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = 7 \cdot 5 \cdot 16 =$$
$$= 560$$

14.21. На колі розміщено 10 точок. Скільки існує трикутників, вершинами яких є ці точки?

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{\cancel{7!} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot 10}{\cancel{7!} \cdot \underset{1}{\cancel{1}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120$$

14.23. Гральний кубик підкидають тричі. Скільки різних послідовностей чисел можна при цьому отримати?

$$C_6^1 = \frac{6!}{1! 5!} = \frac{\cancel{5}! 6}{1 \cdot \cancel{5}} = 6$$

$$\textcircled{6} \cdot \textcircled{6} \cdot \textcircled{6} = 216$$

14.25. Скільки можна скласти різних чотирицифрових чисел, у запису яких є тільки непарні цифри, якщо цифри в числі:

1) не повторюються;

2) можуть повторюватися?

1) 1, 3, 5, 7, 9

5 4 3 2

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

2)

5 5 5 5

$$\overset{25}{5 \cdot 5} \cdot 5 \cdot 5 = 625$$

14.31. Скількома способами можна розкласти в ряд 2 білі намистини, чорну, червону і блакитну, якщо білі намистини розташовуються з двох кінців ряду?

$\delta \quad \underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{1} \quad \delta$

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

14.33. Скільки різних шестицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 1, 3, 5, 7, 9, якщо в кожному числі цифри не повторюються?

$\underline{5} \quad \underline{5} \quad \underline{4} \quad \underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{1}$

$$5 \cdot \overset{120}{\overbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 600$$

14.35. Скільки різних правильних нескоротних дробів можна скласти із чисел 2, 3, 5, 7, 15, де в кожний дріб входить два різних числа?

$$\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{15},$$

$$\frac{3}{5}, \frac{3}{7}$$

$$\frac{5}{7}, \frac{7}{15}$$

В: 8 способів

14.36. Скількома способами групу з 8 учнів можна розподілити для участі у двох олімпіадах, якщо в олімпіаді з математики беруть участь 5 учнів, а з фізики – 3?

$$\text{м. } C_8^5 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{\cancel{5}! \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{5}! \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 56$$

$$C_8^5 \cdot C_3^3 =$$

$$\text{ф. } C_3^3 = 1$$

$$56 \cdot 1 = 56$$

14.40. У турнірі «Кубок чемпіонів» грає 16 шахісток, кожна з яких провела партію з кожною із суперниць. Скільки було зіграно партій у цьому турнірі?

$$\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$$

В: 120 партій

