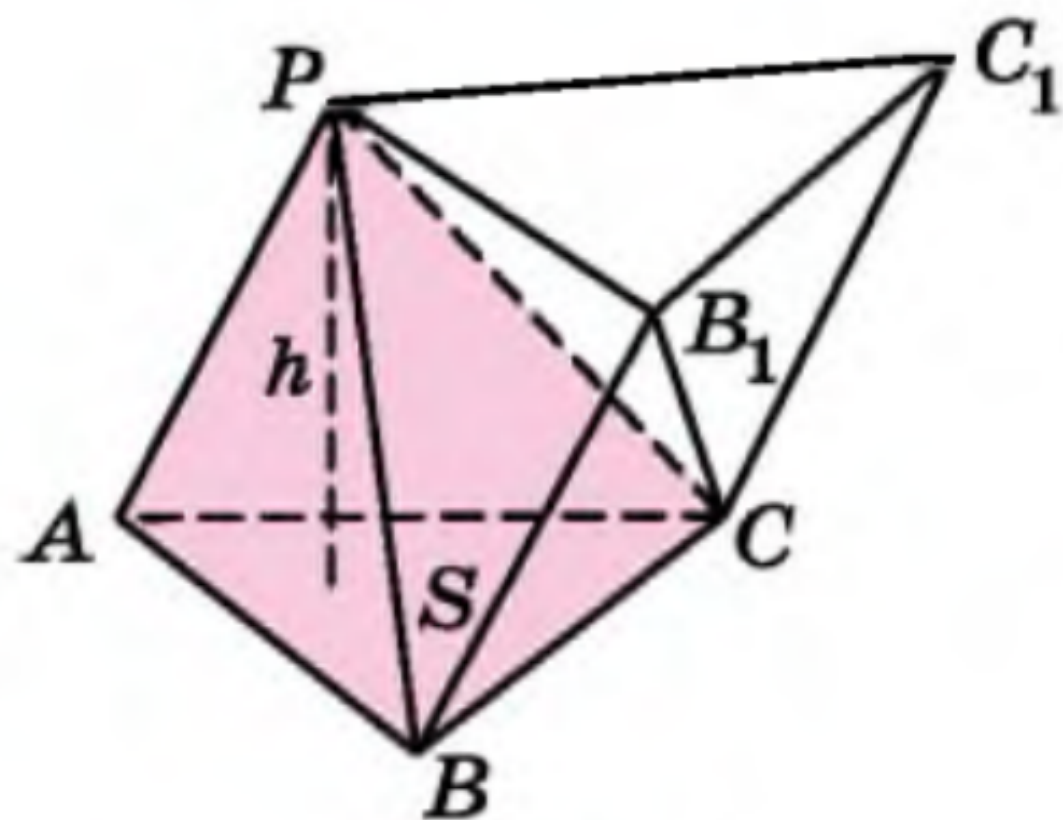


§ 9. ОБ'ЄМ ПІРАМІДИ

Т Теорема 1 (про об'єм піраміди). Об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту.



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$$

Задача 1. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 45° . Знайти об'єм піраміди.

Розв'язання. 1) Нехай $PABC$ – задана в умові піраміда, де $\triangle ABC$ – правильний, $BC = 6$ см, PO – висота піраміди, $\angle PBO = 45^\circ$ (мал. 9.4).

2) Площа основи $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, де $a = BC = 6$ см – сторона основи.

Маємо $S = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ (см²).

3) Оскільки O – центр трикутника, то OB – радіус кола, описаного навколо

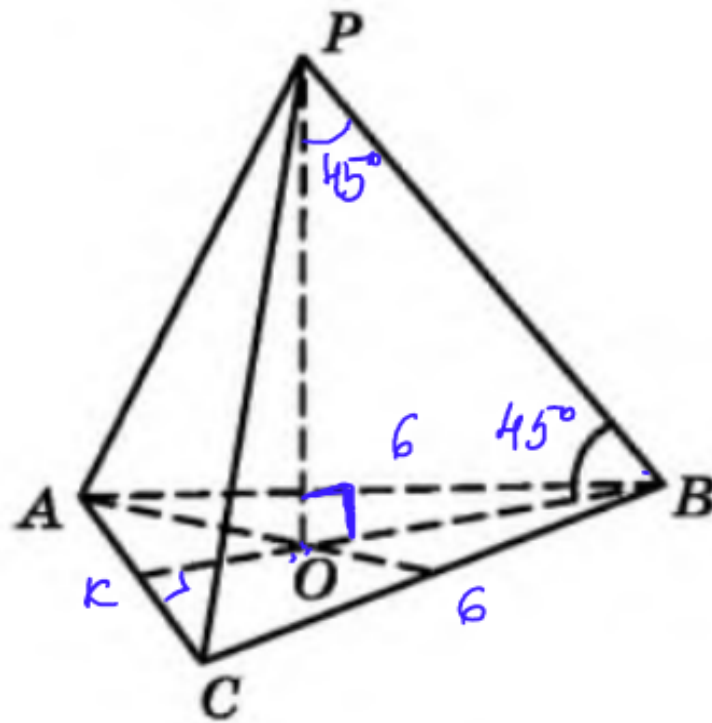
основи, $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ (см).

4) У $\triangle POB$ ($\angle O = 90^\circ$, $\angle PBO = 45^\circ$):
 $\angle OPB = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$.

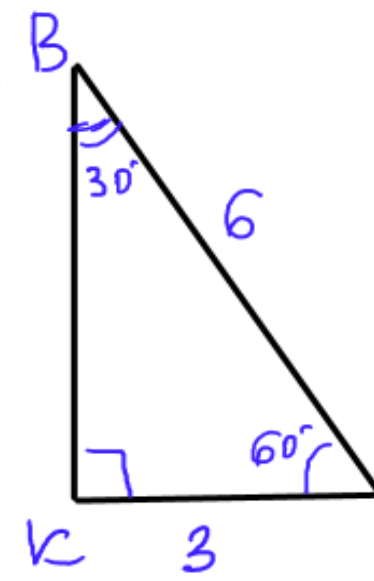
Тому $\triangle POB$ – рівнобедрений і $PO = OB = 2\sqrt{3}$ см.

5) Об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot PO = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 18$ (см³).

Відповідь. 18 см³.



Мал. 9.4

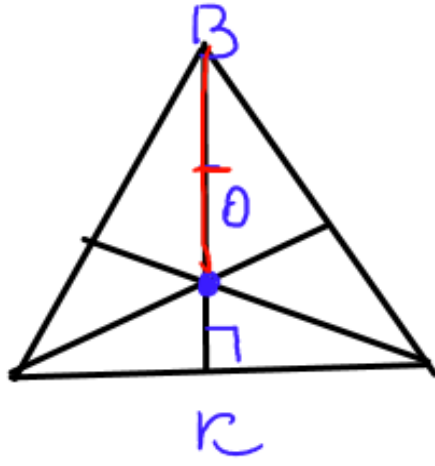


$$S_{BKC} = \frac{1}{2} a \cdot b \quad V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$$

$$BK = \sqrt{6^2 - 3^2} =$$

$$= \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3} \text{ см}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$



$$S_{ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 9\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$$

$$\text{II} \quad BK = 3\sqrt{3} \quad ; \quad BO = \frac{2}{3} BK = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}$$



Задача 2. В основі піраміди лежить квадрат. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а дві інші – нахилені до неї під кутом 30° . Знайти об'єм піраміди, якщо середнє за довжиною бічне ребро дорівнює 8 см.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

Розв'язання. 1) Нехай $PABCD$ – задана в умові піраміда, де $ABCD$ – квадрат, бічні грані PAB і PAD – перпендикулярні до площини основи (мал. 9.5).

2) Оскільки бічні грані PAB і PAD перпендикулярні до площини основи, то бічне ребро PA , по якому перетинаються ці грані, також перпендикулярне до основи. Тому $PA = h$ – висота піраміди.

3) $AD \perp DC$, тому за теоремою про три перпендикуляри $PD \perp DC$. А отже, $(PAD) \perp DC$. Тому $\angle PDA$ – кут, що утворює бічна грань PDC з площиною основи, $\angle PDA = 30^\circ$ (за умовою).

4) Оскільки $\triangle PAD$ – прямокутний ($\angle A = 90^\circ$), то $PD > PA$. Також маємо $PD = PB$ (з рівності трикутників PAD і PAB), а у $\triangle PDC$ $PD < PC$. Тому PD – середнє за довжиною бічне ребро, $PD = 8$ см (за умовою).

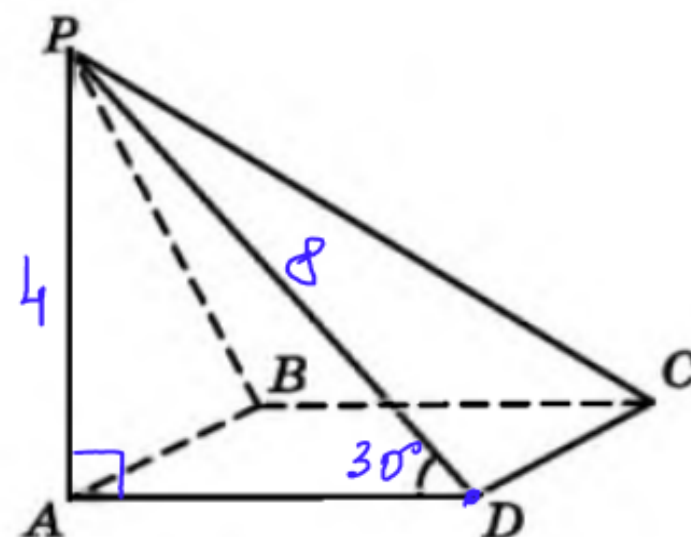
5) У $\triangle PAD$ ($\angle A = 90^\circ$): $PA = \frac{8}{2} = 4$ (см) (за властивістю катета, що дорівнює половині гіпотенузи):

$$AD = \sqrt{PD^2 - PA^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}. = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}$$

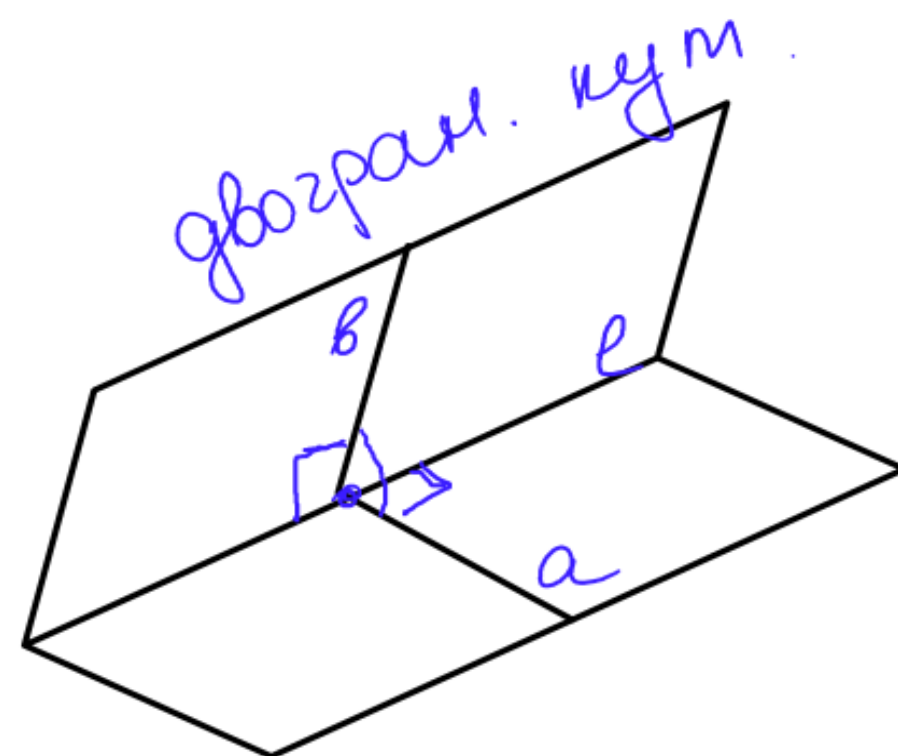
6) Площа основи $S = AD^2 = (4\sqrt{3})^2 = 48$ (см²).

7) Об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 4 = 64$ (см³).

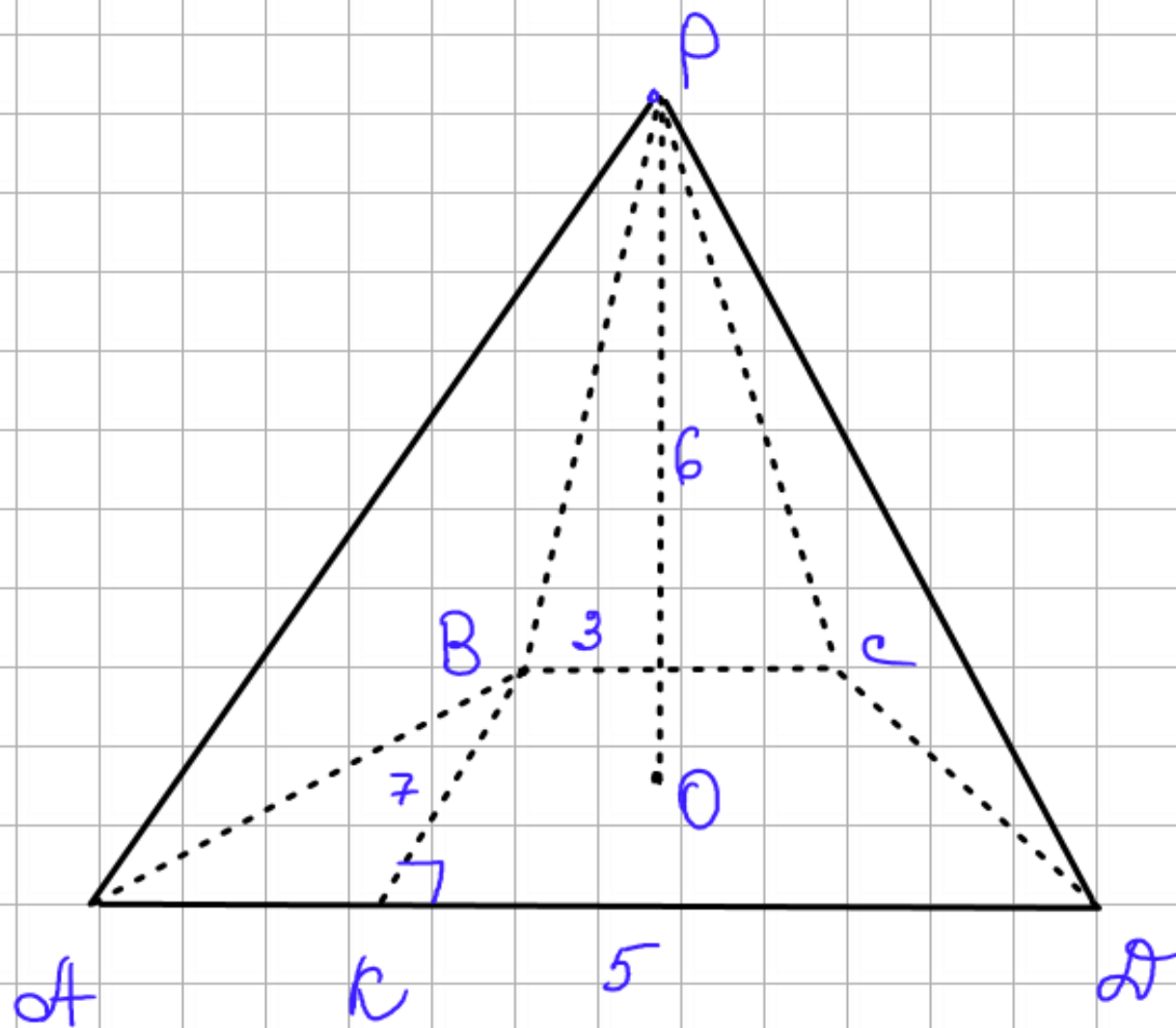
Відповідь. 64 см³.



Мал. 9.5



9.7. Основою піраміди є трапеція з основами 3 см і 5 см та висотою 7 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 6 см.



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

Дано: $PABCD$ - піраміда, $ABCD$ - трапеція,
 $BC \parallel AD$, $BC = 3$ см, $AD = 5$ см, $BK \perp AD$, $BK = 7$ см.
 PO - висота $PABCD$, $PO = 6$ см.
 Знайти: V

Розв'язання

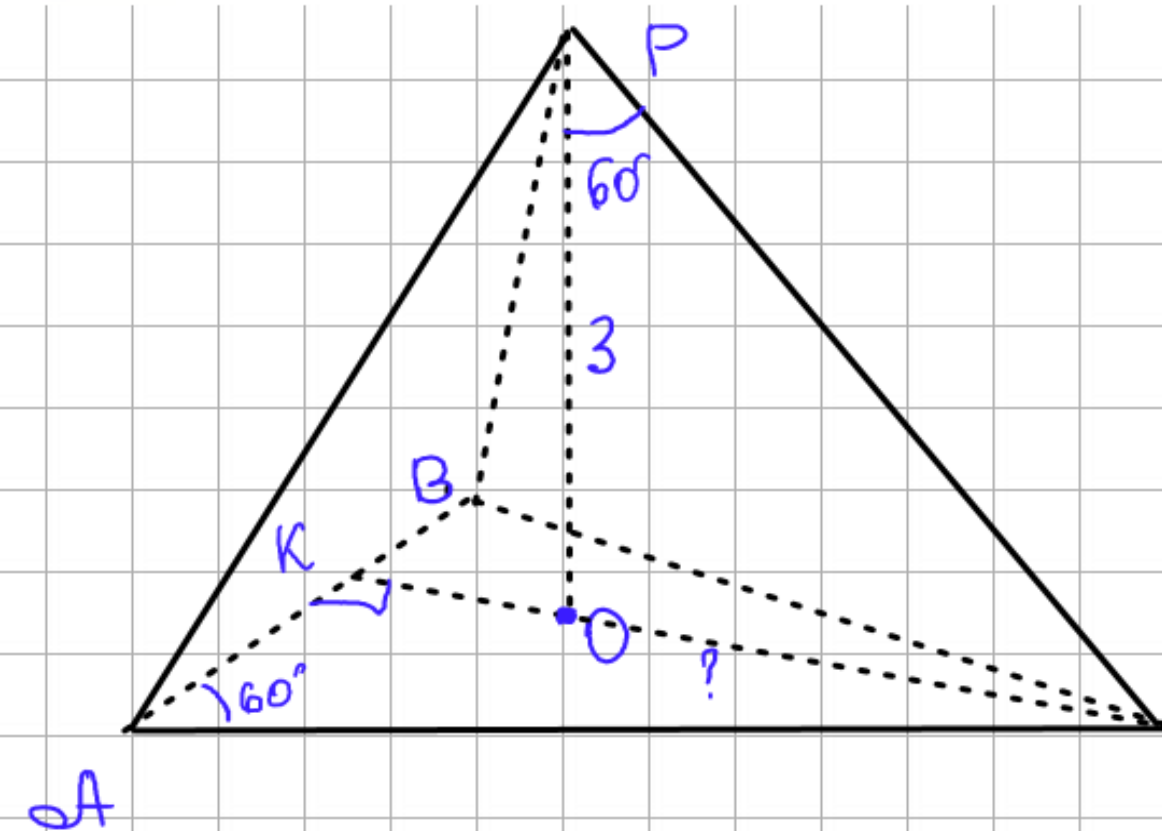
$$1) S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{BC+AD}{2} \cdot BK = \frac{3+5}{2} \cdot 7 = 28 \text{ см}^2$$

$$2) V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot PO = \frac{1}{3} \cdot 28 \cdot 6 = 56 \text{ см}^3$$

$$В: 56 \text{ см}^3$$

9.12. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 3 см і утворює з бічним ребром кут 60° . Знайдіть об'єм піраміди.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$



Дано: $PABC$ — піраміда, $\triangle ABC$ — рівностор.

OP — висота $PABC$, $PO = 3 \text{ см}$, $\angle OPC = 60^\circ$.

З — на: V

1) CK — висота.

2) $\triangle POC$ ($\angle O = 90^\circ$): $\tan P = \frac{OC}{OP}$;

$$\tan 60^\circ = \frac{OC}{3}; \quad OC = 3 \cdot \tan 60^\circ = 3\sqrt{3} \text{ (см)} = \frac{2}{3}$$

$$3) \quad CK = \frac{3\sqrt{3} \cdot 3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ (см)}$$

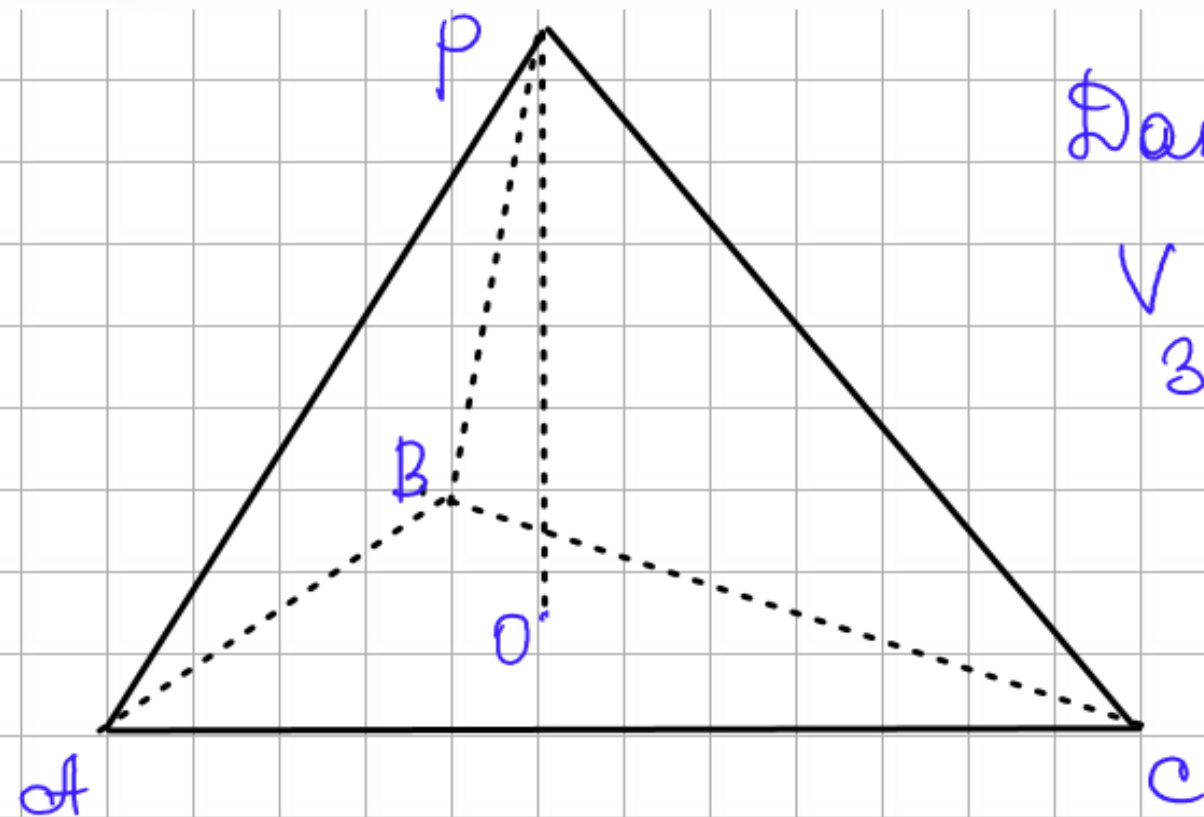
$$4) \quad \triangle AKC (\angle K = 90^\circ): \quad \tan A = \frac{KC}{AK}; \quad \tan 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2} : AK; \quad AK = \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 4,5 \text{ см}$$

$$5) \quad AB = AK \cdot 2 = 4,5 \cdot 2 = 9 \text{ см}; \quad 6) \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot KC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2$$

$$7) \quad V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot PO = \frac{1}{3} \cdot \frac{81\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = \frac{81\sqrt{3}}{4} \text{ (см}^3\text{)}$$

9.13. Об'єм правильної трикутної піраміди дорівнює $15\sqrt{3}$ см³, а висота – 5 см. Знайдіть сторону основи піраміди.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$



Дано: $PABC$ – піраміда, $\triangle ABC$ – рівностор.

$V = 15\sqrt{3}$ см³, PO – висота, $PABC$, $PO = 5$ см.
З-м: AC

Розв'язання

$$1) V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H ; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot PO$$

$$15\sqrt{3} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot 5 ; \quad 15\sqrt{3} = \frac{5}{3} \cdot S_{\text{осн}} ; \quad S_{\text{осн}} = \frac{15\sqrt{3} \cdot 3}{5} = 9\sqrt{3} \text{ см}^2$$

$$2) S_{\triangle} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} ; \quad \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} ; \quad \frac{a^2}{4} = 9 ; \quad a^2 = 9 \cdot 4 ; \quad a^2 = 36, \quad a = 6 \text{ см.}$$