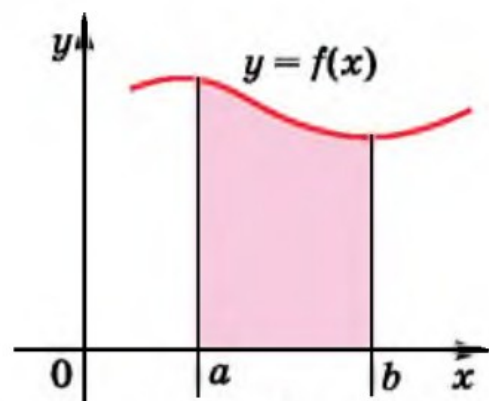


ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР, ІНШІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА У ФІЗИЦІ

1. Обчислення площ плоских фігур

Як ви вже знаєте, площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної функції $y = f(x)$, прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, за умови, що $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a; b]$, обчислюється як різниця $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ (мал. 12.1). З іншого боку, за формулою Ньютона–Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Таким чином, можна зробити висновок про те, що



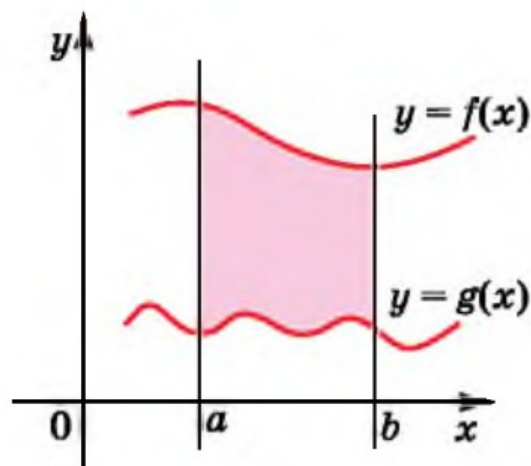
Мал. 12.1

! площа S криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної функції $y = f(x)$, прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, за умови, що $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a; b]$, дорівнює

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Розглянемо плоску фігуру, зверху обмежену графіком функції $y = f(x)$, знизу – графіком функції $y = g(x)$, вертикальними прямими $x = a$, $x = b$, причому функції $y = f(x)$, $y = g(x)$ – неперервні на $[a; b]$ і для всіх значень $x \in [a; b]$ виконуються нерівності $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, $f(x) \geq g(x)$ (мал. 12.3).

Площа цієї фігури S дорівнює різниці площ $S_f - S_g$, де S_f – площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, а S_g – площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = g(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Отже,



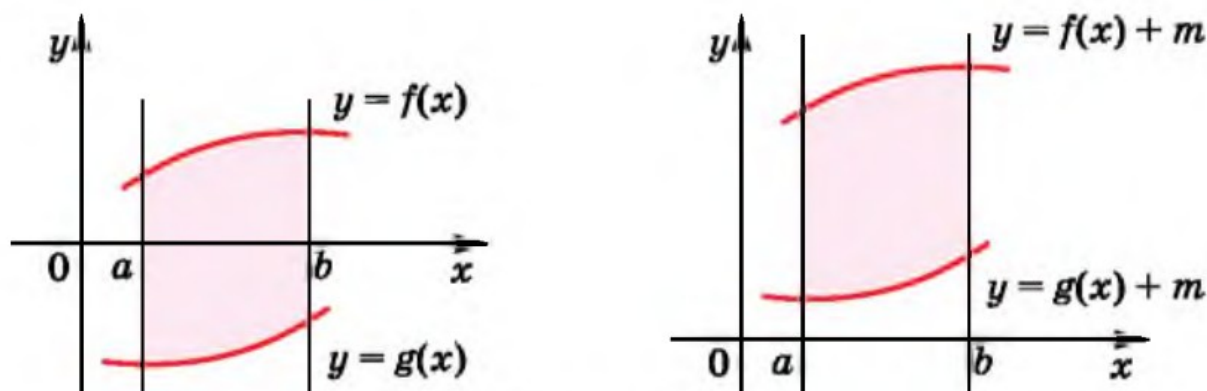
Мал. 12.3

$$S = S_f - S_g = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

Використовуючи властивості інтеграла, маємо

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Ця формула буде правильною і в тому випадку, коли одна або обидві умови $f(x) \geq 0$ і $g(x) \geq 0$ не виконуються. У цьому разі достатньо перенести плоску фігуру вздовж осі ординат на m одиниць, вибравши m довільним чином так, щоб уся фігура розміщувалася вище від осі абсцис (мал. 12.4).



Мал. 12.4

Тоді площа шуканої фігури

$$S = \int_a^b ((f(x) + m) - (g(x) + m)) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Отже,

! *площа S плоскої фігури, яка обмежена неперервними на проміжку $[a; b]$ функціями $y = f(x)$ і $y = g(x)$ такими, що для всіх $x \in [a; b]$ виконується $f(x) \geq g(x)$, та прямими $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою*

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$