

Тема. Корінь n -го степеня. Арифметичний корінь n -го степеня і його властивості.

Пригадаємо, що таке квадратний корінь і його арифметичне значення.

Квадратним коренем із числа a називають число, квадрат якого дорівнює a .

З додатного числа квадратних коренів існує два. Наприклад, числа 7 і -7 — квадратні корені із числа 49, оскільки $7^2 = 49$ і $(-7)^2 = 49$. Невід'ємне значення квадратного кореня із числа a називають арифметичним значенням квадратного кореня із числа a і позначають символом $\sqrt{a}$. Друге значення квадратного кореня із числа a дорівнює $-\sqrt{a}$. Квадратний корінь із числа 0 дорівнює 0. Квадратний корінь з від'ємного числа не існує.

Коренем n -го степеня із числа a називають число, n -й степінь якого дорівнює a .

Невід'ємний корінь n -го степеня з додатного числа a називають **арифметичним значенням кореня n -го степеня із числа a** . Його позначають символом $\sqrt[n]{a}$.

Квадратний корінь називають ще *коренем другого степеня*.

Подібно до коренів другого степеня існують також корені третього, четвертого, ..., n -го степенів.

Якщо показник кореня n — число непарне, то при кожному значенні a значення кореня n -го степеня з числа a існує, і його також позначають $\sqrt[n]{a}$. У виразі $\sqrt[n]{a}$:

a — підкореневий вираз, $\sqrt{}$ — знак кореня, n — показник кореня.

Приклади:

а) $\sqrt[3]{-64} = -4$, оскільки $(-4)^3 = -64$;

б) $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3^4 = 81$;

в) $\sqrt[5]{0,00001} = 0,1$, оскільки $0,1^5 = 0,00001$.

У тих випадках, коли зрозуміло, що мова йде про арифметичний корінь n -го степеня, коротко говорять «корінь n -го степеня».

Приклад. Знайдемо значення:

а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[100]{0}$.

а) $\sqrt[3]{8} = 2$, оскільки $2^3 = 8$

б) $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3^4 = 81$

в) $\sqrt[5]{1} = 1$, оскільки $1^5 = 1$

г) $\sqrt[100]{0} = 0$, оскільки $0^{100} = 0$.

Обчислення значень коренів n -го степеня із чисел називають *добуванням коренів* із цих чисел. З деяких чисел корені можна добувати усно, з інших — користуючись калькулятором або таблицями.

Якщо натуральне число n парне, то $\sqrt[n]{a}$ — це *арифметичний корінь* із числа $a \geq 0$, тобто невід'ємне число, n -й степінь якого дорівнює a . У цьому випадку область визначення виразу $\sqrt[n]{a}$ — множина всіх невід'ємних дійсних чисел. Наприклад, для виразу $\sqrt{x-5}$ — область визначення $[5; +\infty)$, для $\sqrt[4]{x+7}$ — область визначення $[-7; +\infty)$.

При непарному натуральному n вираз $\sqrt[n]{a}$ має зміст і тоді, коли число a від'ємне, наприклад: $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[9]{0} = 0$, $\sqrt[5]{-0,00032} = -0,2$.

Для додатних підкореневих виразів і довільних показників коренів справджуються властивості, аналогічні властивостям квадратних коренів:

$$1) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

$$4) \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k};$$

$$2) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

$$5) \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k;$$

$$3) \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$$

$$6) \sqrt[n]{a^{nk}} = a^k.$$

Зверніть увагу! $\sqrt[n]{a^n} = a$, якщо $a \geq 0$; $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$; $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$.

Приклади:

$$а) \sqrt[3]{12 \cdot 3 \cdot 18} = \sqrt[3]{12 \cdot 18} = \sqrt[3]{4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 6;$$

$$б) \frac{5\sqrt[3]{16}}{6\sqrt[3]{250}} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{250}} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{3};$$

$$в) (2^4\sqrt{9})^6 = 2^6 \cdot (\sqrt[4]{9})^6 = 64 \cdot (\sqrt{9})^3 = 64 \cdot 3^3 = 1728.$$

Щоб помножити корені з різними показниками, їх спочатку зводять до спільного показника:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 3^3} = \sqrt[12]{432}.$$

Приклади. Знайдемо значення:

$$1) \sqrt[3]{216} = 6$$

$$2) \sqrt[4]{0,0016} = 0,2$$

$$3) \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$$

$$5) \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$$

$$6) \frac{1}{3} \sqrt[5]{-243} = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$$

$$7) \sqrt[3]{64 \cdot 125} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{125} = 4 \cdot 5 = 20$$

$$8) \sqrt[5]{2^{10} \cdot 7^5} = \sqrt[5]{(2^2)^5} \cdot \sqrt[5]{7^5} = 2^2 \cdot 7 = 28$$

$$9) \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2 \cdot 8} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$10) \frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}} = \sqrt[5]{\frac{4}{128}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$$

$$11) \sqrt[4]{(-7,3)^4} = |-7,3| = 7,3$$

$$12) \sqrt[6]{1,2^{12}} = 1,2^2 = 1,44$$

Домашнє завдання:

Обчислити:

$$1. \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{343} =$$

$$2. \sqrt[3]{0,064 \cdot 125} =$$

$$3. \sqrt[4]{2^8 \cdot 5^4} =$$

$$4. \sqrt[3]{-125} =$$

$$5. \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{4} =$$

$$6. \sqrt[5]{-0,00032} \cdot \sqrt{25} =$$

$$7. \sqrt[5]{\frac{7^5}{2^{10}}} =$$

$$8. \frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} \cdot \sqrt[3]{-0,027} =$$

$$9. 2\sqrt{64} + 5\sqrt[3]{-64} =$$

$$10. \sqrt[4]{\frac{3^{12}}{5^8}} =$$

$$11. \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2} : \sqrt[3]{\frac{4}{9}} =$$

$$12. \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}} =$$