

1. Поняття первісної

Ви вже вмієте знаходити похідну заданої функції $y = f(x)$. Але в математиці часто доводиться розв'язувати обернену задачу: знаходити невідому функцію $f(x)$, якщо відома її похідна $f'(x)$. Так, наприклад, у фізиці, якщо відомо закон руху матеріальної точки $s(t)$, то можна знайти закон зміни швидкості $v(t)$, оскільки $v(t) = s'(t)$. Часто виникає потреба визначити закон руху $s(t)$, маючи $v(t)$, тобто відновити функцію за її похідною, або, як кажуть математики, знайти *первісну* для заданої функції.



Функцію $F(x)$ називають *первісною* для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо для всіх x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Знаходження функції $f(x)$ за її похідною називають операцією *інтегрування* (від лат. *integratio* – відновлення). Ця операція є оберненою до операції диференціювання.

Приклад 1. Для функції $f(x) = 2x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$ первісною є функція $F(x) = x^2$, оскільки для кожного x із цього проміжку виконується рівність $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$.

Зауважимо, що, наприклад, функція $x^2 + 1$ має ту саму похідну, що й функція x^2 , дійсно $(x^2 + 1)' = 2x$. Тому функція $x^2 + 1$ є також первісною для функції $f(x) = 2x$. Зрозуміло, що замість числа 1 можна підставити будь-яке інше число C , матимемо $(x^2 + C)' = 2x$. Звідси приходимо до висновку: *задача знаходження первісної має безліч розв'язків* у тому випадку, коли хоча б один з розв'язків можна знайти.

2. Основна властивість первісних

У попередньому пункті ми встановили, що задача знаходження первісної має безліч розв'язків. Знайти всі ці розв'язки дає змогу *основна властивість первісної*.



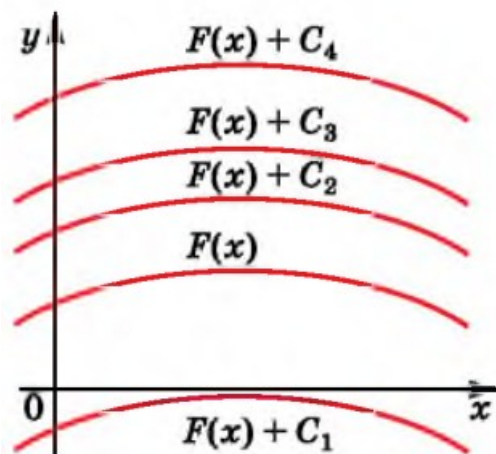
Теорема (основна властивість первісної). Кожна з первісних для функції $f(x)$ на заданому проміжку має вигляд $F(x) + C$, де $F(x)$ – одна із цих первісних, а C – довільна стала.

Зауважимо, що в ній коротко сформульовано дві властивості первісної:

1) яке б число не підставили у вираз $F(x) + C$ замість C , отримаємо первісну для $f(x)$ на заданому проміжку;

2) яку б первісну $F_1(x)$ для функції $f(x)$ на заданому проміжку не брали, завжди можна підібрати таке число C , що для всіх x із цього проміжку буде виконуватися рівність $F_1(x) = F(x) + C$.

Приклад 3. Оскільки для функції $f(x) = -3x^2$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$ однією з первісних є функція $-x^3$ (дійсно $(-x^3)' = -3x^2 = f(x)$), то загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x) = -3x^2$ можна записати у вигляді $F(x) = -x^3 + C$.



Мал. 8.1

Геометрично основна властивість первісної означає, що *графіки будь-яких двох первісних для функції $f(x)$ можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат (мал. 8.1).*

3. Невизначений інтеграл

! Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ називають **невизначеним інтегралом** і позначають символом $\int f(x)dx$ (читають: «інтеграл еф від ікс де ікс»).

Тут $f(x)$ — підінтегральна функція, x — змінна інтегрування. Таким чином:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $F(x)$ — одна з первісних, а C — довільна стала.

Приклад 4. Оскільки x^2 — первісна для $2x$, то $\int 2x dx = x^2 + C$.