



Нова українська школа

$$4^8 > 0$$



$$S = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$



$$S = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + ab + ab =$$

$$0^{2015} = 0$$



	a	b
a	$S = a^2$	$S = ab$
b	$S = ab$	$S = b^2$

$$5^2 + 4^2 = 4^2 + 5^2$$
$$41 = 41$$

АЛГЕБРА

НАВЧАЄМОСЯ РАЗОМ З ПІДРУЧНИКОМ

Розглядаємо ситуацію

**Дивимосся
презентацію**

Вчимо правило

Запам'ятайте!

Основна властивість степенів
 Діє над двома степенями з рівними основами дорівнює степеню з тією самою основою і показником, що є сумою показників множників:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Справді, спираючись на означення степенів, легко можна розгорнути кожний степінь у добуток, а потім згорнути отриманий результат у степінь:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n+m} = a^{n+m}$$

Щоб помножити кілька степенів з однією основою, треба застосувати основну властивість степенів.

Випенів.
Приклад, $a^n \cdot a^m \cdot a^k = (a^n \cdot a^m) \cdot a^k = a^{n+m} \cdot a^k = a^{n+m+k}$.

Властивість частки степенів з рівними основами
Частка степенів з рівними основами, відмінними від нуля, дорівнює степеню з тією самою основою і показником, що дорівнює різниці показників діленого й дільника:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (n > m).$$

Доведіть цю властивість самостійно.

Чому на показники степенів накладено обмеження $n > m$?

Тому, що при $n \leq t$ у частці одержимо степінь, показник якого не є натуральним числом.

Вчимося діяти

Відповідаємо на запитання

Розглядаємо типову задачу

Перевіряємо теорію

Тренуємо усний рахунок

Розв'язуємо задачі

Вчимо терміни іншими мовами

Одержуємо додаткові відомості

Виконуємо інтерактивні вправи

Перевіряємо свої знання

ПЕРЕВІРТЕ, ВАС ВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 3
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називають **одночленом**?
2. Який вигляд **одночлена** називають **стандартним**?
3. Що називають **коефіцієнтом** **одночлена**? Степенем **одночлена**?
4. Як **порівняти** **одночлен** до степеня?
5. Що таке **многочлен**?
6. Як **звести** **многочлен** до стандартного вигляду?
7. Який **член** **многочлена** називають **старшим**? Як його **визначити**?
8. Що називають **ступенем** **многочлена**?
9. Як **опанувати** **добавити** **многочлен**? **Многочлен** на **многочлені**?
10. Як **помножити** **одночлен** на **многочлен**?
11. Як **тотожності** **називають** **формулами** **скороченого** **множення**?
12. **Записати** **формули** **для** **обчислення** **квадрата** **суми** **та** **квадрата** **різниці**.
13. **Записати** **формулу** **різниці** **квадратів**.
14. **Записати** **формулу** **суми** **кубів**; **різниці** **кубів**.
15. **Записати** **формули** **множення** **на** **множники**.

Уважно прочитайте задані та знайдіть серед запропонованих відповіді правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1. У стандартному вигляді записано одноклен:

2. Зведіть подібні члени многочлена:

3. Який степінь многочлена $9m^3 + 1 + 2m^6 - m^4 + 8m^5$?

Одночлени і многочлени

4. Знайдіть добуток одночленів: $0,5(y^6)^3 \cdot (2y^8)^5$.

А. y^{22} . Б. y^{38} . В. $16y^{38}$. Г. $8y^{22}$.

5*. Спростіть вираз:

А. $\frac{1}{16}x^2y^2 + 9a^2$.

Б. $x^3y^3 + 27a^3 + \frac{3}{4}x^2y^2a$.

В. $x^3y^3 + 27a^3 + \frac{3}{4}x^2y^2a$.

Г. $\frac{25}{64}x^3y^3 + 27a^3$.

1. Подайте вираз $(7a + 5b)^2$ у вигляді многочлена.

2. Піднесіть до квадрата двочлен $0,3x - 0,1y$.

3. Розкладіть на множники многочлен $8c^4 - 12c^3 + 5c^2 + 25$.

4*. Обчисліть, не користуючись калькулятором:
 $101^2 - 99^2$.
 А. 200. В. 400.
 Б. 4. Г. 1.

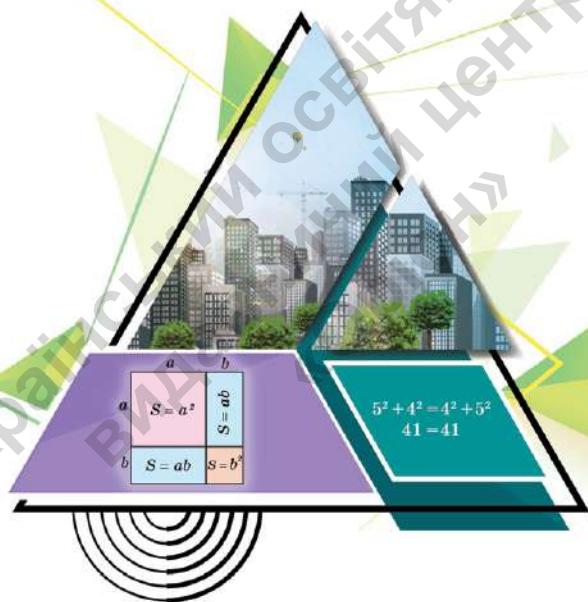
5*. Розкладіть на множники вираз:
 $x^2 - (x - y)^2 - z^2 - 4x^2 + 4xy + 4xz$.

A. $(x - y - z)(z - y - 3x)$.
B. $(x - y + z)(z - y - 4x)$.
Г. $(x - y - z)(z - y - 4x)$.



АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти



Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

УДК 512*кл7(075.3)
А45

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 05.02.2024 № 124)

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Підручник розроблено за модельною навчальною програмою
«Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(авторський колектив програми:

М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, Д. В. Васильєва)

Авторський колектив підручника:

Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, О. А. Данько,
О. М. Коломієць, І. М. Богатирьова, З. О. Сердюк

Адреса інтернет-ресурсу до підручника:



qr.orioncentr.com.ua/ejDI0

**Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А., Данько О. А.,
Коломієць О. М., Богатирьова І. М., Сердюк З. О.**

А45 Алгебра : підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої
освіти / Київ: УОБЦ «Оріон», 2024. 352 с. : іл.

ISBN 978-966-991-291-6

УДК 512*кл7(075.3)

ISBN 978-966-991-291-6

© Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А.,
Данько О. А., Коломієць О. М.,
Богатирьова І. М.,
Сердюк З. О., 2024
© УОБЦ «Оріон», 2024

ДОРОГІ УЧНІ Й УЧЕНИЦІ!

Ви приступаєте до вивчення нового предмета, який називається алгебра. Слово алгебра (*аль-джебр*) є початковим словом назви одного з творів видатного узбецького математика Мухаммеда аль Хорезмі, який жив і працював у Хорезмі в IX ст. Словом *аль-джебр* він називав один зі способів перетворення рівнянь.

Алгебра — один із великих розділів математики. Вона виникла як наука про рівняння у зв'язку з потребами практики і як результат пошуку узагальнених способів розв'язування великої кількості схожих задач. Нині засобами алгебри користуються в багатьох галузях знань — фізиці, хімії, біології, економіці, комп'ютерних технологіях та інженерії.

У попередніх класах ви вже познайомилися з елементами алгебри. Ви навчилися використовувати букви для запису дій із числами, величинами, властивостей таких дій, складати та спрощувати вирази, розв'язувати деякі рівняння. Тепер ви продовжите розвивати свої вміння рахувати, міркувати, порівнювати, робити висновки, ставити запитання й відповідати на них, розв'язувати задачі та обґрунтовувати свої твердження. Для цього треба наполегливо і відповідально працювати на уроках, а також самостійно працювати вдома. А підручник вам у цьому допоможе.

Як успішно вивчати алгебру за цим підручником? Весь матеріал поділено на п'ять розділів, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на найважливіші формулювання, які потрібно зрозуміти, запам'ятати й уміти застосовувати під час розв'язування задач. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви понять).

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа і повторити його, допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне», які є після кожного параграфа. А після кож-

ного розділу вміщено контрольні запитання й тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (°) позначають задачі середнього рівня складності. Їх треба навчитися розв'язувати всім, щоб мати змогу вивчати алгебру далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня складності. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння й наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

Скориставшись рубрикою **«Дізнайтеся більше»**, ви зможете поглибити й розширити свої знання.

У підручнику використовуються спеціальні позначки (пиктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.



— Увага! Не допустіть помилку



— Важливо знати



— Як записати



— задачі про Україну і світ



— екологічні задачі



— фінансові розрахунки



— задачі на рух та його безпеку



— задачі про збереження здоров'я



— інтерактивні вправи



— домашні справи

Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового і задоволення від навчання!

Розділ 1. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ВИВЧЕНОГО В 6 КЛАСІ

ЧИСЛА, ДІЇ З ЧИСЛАМИ. РОБОТА З ДАНИМИ

1. Знайдіть НСД чисельника і знаменника дробу та скоротіть дріб:

$$\begin{array}{llll} 1) \frac{10}{35}; & 3) \frac{88}{198}; & 5) \frac{54}{144}; & 7) \frac{84}{147}; \\ 2) \frac{42}{70}; & 4) \frac{154}{210}; & 6) \frac{170}{374}; & 8) \frac{78}{114}. \end{array}$$



2. Знайдіть НСД чисел:

1) 250 і 75; 2) 134 і 86; 3) 13 і 133; 4) 280 і 216.

3. Зведіть дроби на найменшого спільного знаменника:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{7}{28} \text{ і } \frac{2}{42}; & 3) \frac{19}{36} \text{ і } \frac{17}{41}; \\ 2) \frac{5}{72} \text{ і } \frac{13}{218}; & 4) \frac{11}{93} \text{ і } \frac{5}{45}. \end{array}$$



qr.orioncentr.com.ua/pd0sx

4. Знайдіть НСК чисел:

1) 51 і 153; 2) 21 і 17; 3) 30 і 42; 4) 660 і 2772.

5. Розташуйте числа в порядку збільшення:

$$\begin{array}{l} 1) -\frac{1}{11}; -\frac{3}{11}; -\frac{5}{11}; -\frac{7}{11}; 1\frac{6}{13}; 0; 1; \\ 2) 1,09; 1,009; -2,4; -2,04; -2,004; \\ 3) -0,5; (-0,5)^2; (-0,5)^3; \\ 4) -0,2; (-0,2)^2; (-0,2)^3; 0. \end{array}$$



qr.orioncentr.com.ua/9XPQK

6. Обчисліть:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5}; & 3) \left(6\frac{1}{7} - 10\frac{3}{14}\right) : \left(-\frac{3}{7}\right) + 0,5; \\ 2) 2\frac{1}{3} - \left(1\frac{1}{9} + 3\frac{2}{15}\right); & 4) 6,5 \cdot \frac{8}{13} + 5\frac{1}{3} : \left(-2\frac{2}{3}\right). \end{array}$$

7. Обчисліть: $-\frac{5}{7} \cdot \left(-2\frac{1}{10}\right) + \frac{5}{9} \cdot \frac{27}{45}$.

8. Обчисліть:

$$1) |-36| : |-4| + |-11| \cdot |-5|; \quad 2) \left| -\frac{3}{4} - 0,15 \right| : 0,03.$$

9. Обчисліть: $\left| -\frac{4}{5} \right| - \left| -1\frac{1}{3} \right| \cdot \left| 2\frac{1}{16} \right|$.



10. Відповідно до порад дієтологів, Оксана дотримується правила 400/600/600. Тобто калорійність її сніданку становить приблизно 400 ккал, обіду і вечері — по 600 ккал. Також вона допускає два перекуси (другий сніданок і полуденок) по 200 ккал. За цими даними побудуйте стовпчасту діаграму добового споживання калорій Оксаною.

МАТЕМАТИЧНІ ВИРАЗИ, РІВНОСТІ, НЕРІВНОСТІ

11. Складіть числовий вираз і знайдіть його значення.

1) різниця суми чисел 2,4 і 1,6 та числа 5,18;

2) добуток суми чисел $\frac{2}{7}$ і $\frac{1}{14}$ та

числа $-\frac{1}{25}$;

3) частка від ділення суми чисел 5,1 і 1,9 на їхню різницю.



12. Складіть числовий вираз і знайдіть його значення.

1) сума квадратів чисел 1,5 та 0,3;

2) квадрат різниці чисел $1\frac{2}{5}$ і $-0,2$;

3) різниця квадратів чисел $-\frac{1}{3}$ і $-\frac{5}{6}$;

4) квадрат суми чисел $-19,1$ і $9,1$.

13. Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:

1) добуток суми і різниці чисел -15 і 17 ;

2) квадрат суми чисел $\frac{2}{9}$ і $-\frac{1}{3}$.

14. Знайдіть значення виразу:

1) $5,4a - 3,1$, якщо $a = 2$;

2) $z + (x + y - 5z)$, якщо $x + y = 5$, $z = 2,1$.

15. Знайдіть значення виразу $8x + 8y$, якщо $x + y = -1,5$.

16. У магазин надійшли два види канцелярських наборів. Один із них коштував a грн, а інший — b грн. Поясніть, який зміст мають вирази:

1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) $2a + 3b$; 4) $5a - 4b$.

17. Із двох пунктів, відстань між якими s км, назу-

стріч одна одній вийшли дві туристичні групи. Одна група рухалась зі швидкістю x км/год, а інша — зі швидкістю y км/год. Запишіть вираз для знаходження кількості годин, через яку туристичні групи зустрінуться.

18. Спростіть вираз:

1) $3,8 \cdot 5a \cdot (-7)$;

5) $3 - 17y - 4(y + 13)$;

2) $-0,25b \cdot 16k$;

6) $-4(m + n) + 6,8m + 1,8n$;

3) $2(3x - 4) + 5$;

7) $2,4 - (x - (2,6x - 6))$;

4) $-6(2a - 4) + 3(7 - a)$; 8) $5d - (4d - (3d - (2d - 1)))$.

19. Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{2}a \cdot (-0,2b)$;

2) $9(x + 2y) - (2x - 5y)$.

20. Розв'яжіть рівняння:

1) $5x + 19 = 14$;

2) $22x - 1,1 = -x + 3,5$;

3) $13 - 2(5z - 1) = 2 + z + 2z$;

4) $7(2x - 1) - (3x - 8) = 64$;

5) $\frac{y}{2} - \frac{2y}{3} = 1$;

6) $(x - 5)(2x + 1) = 0$.



qr.orioncentr.com.ua/HjRAU

21. Розв'яжіть рівняння:

1) $3(x + 2) = 15$;

2) $8 + 1\frac{1}{5}x = \frac{9}{10}x - 16$.

ВЕЛИЧИНИ. СЮЖЕТНІ ЗАДАЧІ

22. Чи правильно, що:

1) $\frac{2}{5}$ від 1 м становлять 20 см;

2) 250 м становлять $\frac{1}{4}$ кілометра;

3) 18 хв становлять 0,3 години;

4) третина хвилини більша за 20 секунд;

5) 3 % числа 80 дорівнюють 24;

6) якщо 75 % — це число 57, то 100 % — це число 76?



qr.orioncentr.com.ua/xfDQh

23. Турист за перший день пройшов 24 км, за другий — $\frac{5}{8}$ шляху, що пройшов за перший день, а за третій — $1\frac{2}{5}$ шляху, що пройшов за другий день. Який шлях пройшов турист за три дні?

24. Подорожуючи Україною, велосипедист за перший день проїхав 129 км, що становить $\frac{3}{4}$ шляху, який він проїхав за другий день. За третій день велосипедист проїхав 0,8 того шляху, що проїхав за другий день. Який шлях подолав турист за три дні?

25. Київська телевежа — найвища телевежа України. Її висота становить 380 м. Трохи нижча Донецька телевежа. Її висота наближено становить 94,8 % висоти Київської телевежі. Знайдіть висоту Вінницької телевежі, якщо вона на 1,7 % нижча від Донецької телевежі (відповідь округліть до одиниць).



26. Двоє хлопчиків посперечались про те, скільки солі міститься в 250 г 12 % -го розчину. Андрійко

сказав, що в розчині 30 г солі, а Сашко вважає, що в розчині 40 г солі. Хто із хлопчиків правий?

27. За 2 кг печива Надійка заплатила 78 грн. Скільки гривень коштує 0,5 кг печива? Скільки кілограмів печива можна купити за 117 грн?



28. За 4 год катер проплив 80 км. Яку відстань катер пропливе за 2,5 год, рухаючись із такою самою швидкістю?



29. Відстань між Тернополем та Івано-Франківськом автомобіль проїхав за 1,5 год, а автобус — за 2 год 15 хв. Знайдіть швидкості автомобіля й автобуса, якщо автобус рухався на 30 км/год повільніше, ніж автомобіль.



30. Човен пройшов відстань між двома пристанями за течією річки за 1 год 24 хв і повернувся назад за 1,8 год. Знайдіть швидкість течії річки і відстань між пристанями, якщо власна швидкість човна — 24 км/год.



31. Новий міський парк закладено у формі прямокутника, ширина якого становить 40 % довжини. Знайдіть площу парку (у гектарах), якщо його периметр дорівнює 1,82 км.

ГРАФІКИ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ

32. Дано точки $A(-1; -1)$, $B(4; -2)$, $C(3; 0)$, $D(-3; 0)$, $E(0; 0)$, $F(0; -5)$, $G(-4; 5)$ і $K(6; 3)$. З'ясуйте:

- 1) яка з даних точок лежить на осі ординат;
- 2) яка з даних точок лежить на осі абсцис;



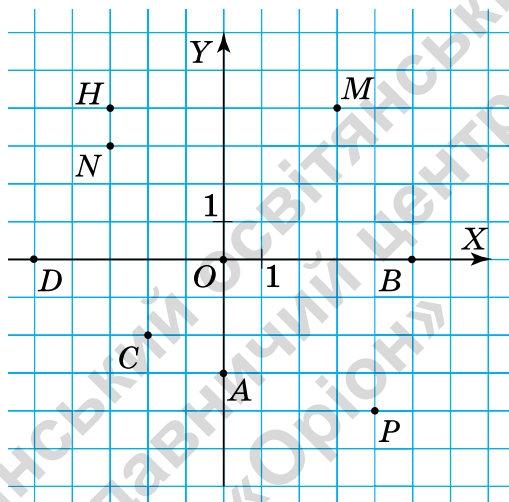
qr.orioncentr.com.ua/pvmHK

3) у яких координатних чвертях лежать інші точки.
Побудуйте ці точки на координатній площині.

- 33.** Дано точки $A(-2; -5)$, $B(3; -1)$, $C(0; 0)$, $D(-1; 0)$, $E(5; 0)$, $F(0; -4)$, $G(-7; 5)$ і $K(1; 2)$. З'ясуйте:

1) яка з даних точок лежить на осі ординат;
2) яка з даних точок лежить на осі абсцис;
3) у яких координатних чвертях лежать інші точки.
Побудуйте ці точки в координатній площині.

- 34.** За малюнком 1 визначте координати точок.



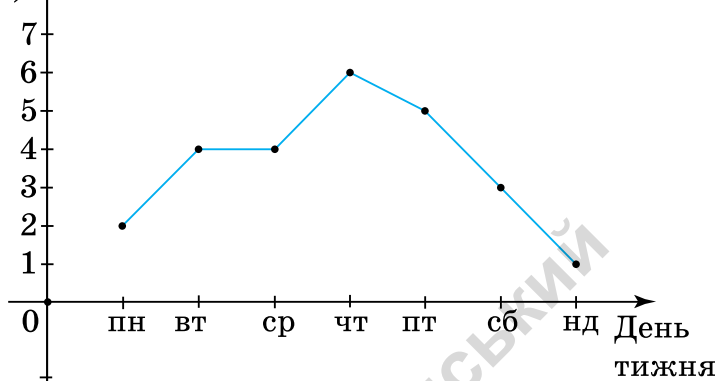
Мал. 1

- 35.** Три вершини прямокутника $ABCD$ мають координати: $A(-3; -2)$, $B(-3; 2)$ і $C(6; 2)$. Зайдіть координати вершини D . Обчисліть периметр і площу прямокутника, якщо одиничний відрізок дорівнює 1 см.

- 36.** Дано точки: $A(-3; 0)$, $B(0; 3)$, $C(0; 5)$ і $D(4; 5)$. Накресліть систему координат та побудуйте в ній прямі AB і CD . Визначте координати точки перетину прямих AB і CD .

- 37.** На малюнку 2 подано графік залежності температури повітря від дня тижня.



Температура
(°C)

Мал. 2

З'ясуйте:

- 1) якою була температура повітря в середу;
- 2) у який день температура повітря становила 3°C ;
- 3) у який день температура повітря була: найнижчою; найвищою;
- 4) на скільки градусів змінилася температура з понеділка по неділю;
- 5) у які дні температура повітря була вищою за 4°C ;
- 6) у який день температура повітря була вищою за 5°C .

- 38.** У таблиці 1 подано дані про зміни температури протягом дев'яти годин. Побудуйте графік залежності температури від часу протягом дев'яти годин.



Таблиця 1

Час (год)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Температура ($^{\circ}\text{C}$)	-4	-2	1	2	2	4	1	0	-3

З'ясуйте:

- 1) у який час температура була: -2°C ; 1°C ; 4°C ;
- 2) яка температура була: о 1 год; о 4 год; о 9 год;
- 3) о котрій годині температура була від'ємною.



Розділ 2. ВИРАЗИ І ТОТОЖНОСТІ

У розділі дізнаєтесь:

- про числові вирази та їх види;
- чим відрізняються числовий вираз і вираз зі змінними;
- що таке допустимі значення змінних у виразі;
- які вирази називають цілими;
- як обчислювати значення виразу зі змінними;
- про способи спрощення виразів;
- яка рівність є тотожністю та як її доводити;
- що таке степінь з натуральним показником та які є властивості дій зі степенями;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці

§ 1. ЧИСЛОВІ ВИРАЗИ

Ситуація. Марина й Сергій, готуючись до школи, придбали зошити в лінійку та в клітинку. Свої дані вони занесли в таблицю 2, а для обчислення вартості покупки склали вирази та знайшли їх значення.



qr.orioncentr.com.ua/JZ2OG

Таблиця 2

	Покупка Марини			Покупка Сергія		
	Ціна	Кількість	Вартість	Ціна	Кількість	Вартість
У лінійку	4 грн	20 шт.	$4 \cdot 20$ (грн)	7 грн	15 шт.	$7 \cdot 15$ (грн)
У клітинку	5 грн	10 шт.	$5 \cdot 10$ (грн)	9 грн	17 шт.	$9 \cdot 17$ (грн)
Обчислення вартості покупки	$4 \cdot 20 + 5 \cdot 10 = 130$ (грн)			$7 \cdot 15 + 9 \cdot 17 = 258$ (грн)		



Чим схожі й чим різняться отримані вирази?

Обидва ці вирази є числовими, але містять різні числа.



Запам'ятайте!

Числовий вираз — це запис, у якому використовують числа, знаки арифметичних дій і дужки для позначення того, які дії і в якій послідовності треба виконати з числами.

Наприклад, вирази $24 + 2$, $24 - 2$, $24 \cdot 2$, $24 : 2$, 24^2 є числовими виразами. А запис $15 + 5) - (($ — не є числовим виразом, оскільки не має змісту.

Запам'ятайте!

Якщо виконати всі арифметичні дії в числовому виразі, то одержимо число, що є *значенням числового виразу*.



Чи для будь-якого числового виразу можна знайти його значення?

Ні.



Наприклад, значення виразу $34 \cdot 5 + 27 : (3 \cdot 5 - 15)$ знайти неможливо, оскільки вираз у дужках набуває нульового значення: $3 \cdot 5 - 15 = 0$. Але ділити на 0 не можна. У такому випадку говорять, що даний вираз *не має значення або не має змісту*.



На 0 ділити не можна!



Щоб знайти значення виразу, необхідно дотримуватися порядку виконання дій.

Порядок виконання дій у виразі

Якщо вираз містить:	то дії виконують:
дії одного ступеня	у тому порядку, у якому вони записані
дії різних ступенів	спочатку старших ступенів
дужки	спочатку в дужках

Задача 1 Знайдіть значення числового виразу:

- 1) $13,2 - 0,7 + 19,3$;
- 2) $34 : 17 - 12,5 \cdot 4$;
- 3) $38 - (6 - 4,5)^2$.

Розв'язання

- 1) $13,2 - 0,7 + 19,3 = 12,5 + 19,3 = 31,8$;
- 2) $34 : 17 - 12,5 \cdot 4 = 2 - 50 = -48$;
- 3) $38 - (6 - 4,5)^2 = 38 - (1,5)^2 = 38 - 2,25 = 35,75$.

Дізнайтеся більше

1. Алгебра (походить від арабського слова *алдфебр*, що означає «поновлення» або «відновлення») — одна із провідних галузей сучасної математики. Слово *алдфебр* уперше трапляється у творі **Аль-Хорезмі** (IX ст.), який був присвячений розв'язуванню рівнянь першого і другого степенів. Пізніші переклади зробили слово *aldjebr* назвою всієї науки «алгебри». qr.orioncentr.com.ua/latFS



2. Сучасний погляд на алгебру як на загальну теорію алгебраїчних структур сформувався на початку XX ст. під впливом праць Д. Гільберта, Е. Штейніца, Веддерберна, Е. Артіна. Однією з видатних жінок-математик, яка зробила значний внесок у розвиток і становлення сучасної алгебри, є німечка вчена **Емілі Амаль Нетер** (1882—1935). На думку багатьох видатних алгебраїстів, вона змінила погляди наукової спільноти на цю науку. qr.orioncentr.com.ua/SmS9G



Словничок

qr.orioncentr.com.ua/fEV8j

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
числовий вираз	numeric expression	numerischer Ausdruck	expression numérique

Пригадайте головне

1. Що називається числовим виразом? Наведіть приклади.
2. Що називають значенням числового виразу?
3. Який порядок виконання дій у числовому виразі без дужок?
4. У якому порядку виконують дії в числовому виразі з дужками?
5. У якому випадку числовий вираз не має змісту?

Усне тренування

Обчисліть:

$25 \cdot 67 \cdot 4;$

$0,25 \cdot 6,7 \cdot 4;$

$0,25 \cdot 67 \cdot 0,4;$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3};$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3};$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} : \frac{1}{3}.$

Розв'яжіть задачі

39'. Чи є числовим виразом запис:

1) $0,15 \cdot 7 + 4;$

4) $5x + 4;$

2) $1,46 > 0,15 \cdot 3;$

5) $3^2 - 0,14 \cdot 6;$

3) $2,78 = 3,78 - 1;$

6) $6x + 5 = 1?$

Відповідь поясніть.

40'. Наведіть приклад числового виразу, що є:

- 1) сумою; 2) різницею; 3) добутком; 4) часткою;
5) квадратом числа; 6) кубом числа.

41'. Чи має зміст вираз:

1) $5 \cdot (15 - 15);$

3) $(105 : 7 - 15) : 26;$

2) $13 : (14 : 2 - 7);$

4) $(94 - 13) : (14 + 106)?$

42°. Прочитайте подані вирази. Значенням якого з виразів є число 7:

1) $63 : 9 - 3;$

3) $(94 - 19) : 5;$

2) $125 : 5 - 9 \cdot 2;$

4) $41 - 17 \cdot 2?$

43°. Дано числа 2 і 5. Із цих чисел складіть вираз, що є: 1) сумою; 2) різницею; 3) добутком; 4) часткою. Скільки таких виразів можна отримати? Знайдіть значення цих виразів.

44°. Дано числа 1 і 4. Із цих чисел складіть вираз, що є: 1) сумою; 2) різницею; 3) добутком; 4) часткою. Скільки таких виразів можна отримати? Знайдіть значення цих виразів.

45°. Знайдіть значення виразу:

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1) $13,6 - 19$; | 6) $48,56 : (-1,6)$; |
| 2) $-14,5 + 28$; | 7) $-0,15 : (-1,25)$; |
| 3) $-15,2 - 4,38$; | 8) $1,8 : 0,24$; |
| 4) $-84,5 - (-71,39)$; | 9) $12,1 \cdot 17,3$; |
| 5) $0,28 \cdot (-0,125)$; | 10) $-34,5 \cdot (0,2 : 5)$. |

46°. Знайдіть значення виразу:

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| 1) $19,49 + (-17,2)$; | 3) $-14,5 \cdot (-0,2)$; |
| 2) $84,5 - 21,47$; | 4) $70,8 : (-0,25)$. |

47°. Обчисліть:



- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1) $12\frac{1}{6} + 8\frac{2}{3}$; | 5) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{14}$; |
| 2) $16\frac{1}{8} + 2\frac{5}{6}$; | 6) $5\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{3}$; |
| 3) $7 - 2\frac{3}{13}$; | 7) $2\frac{3}{4} : 1\frac{3}{8}$; |
| 4) $8\frac{1}{10} - 5\frac{2}{3}$; | 8) $\frac{3}{10} : 2\frac{4}{5}$. |



qr.orioncentr.com.ua/fx08C

48°. Обчисліть:

- | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|
| 1) $16\frac{1}{4} + 14\frac{1}{12}$; | 2) $21\frac{1}{2} - 9\frac{1}{3}$; | 3) $9\frac{2}{7} \cdot 7$. |
|---------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|

49. Знайдіть значення виразу:

- 1) $0,12 \cdot 10 + 2,4 \cdot 5 \cdot 12 - 9 : 1,8$;
- 2) $(15 \cdot 0,012 + 15 : 10^2) : 0,66 - 1,8^2$;
- 3) $(3,4 + 5,1) \cdot 1\frac{3}{17} + \left(1\frac{45}{46} - 2\frac{7}{23}\right) : \frac{15}{23}$.

50. Знайдіть значення виразу:

1) $2,5 \cdot 2^3 + 7,5 \cdot (0,04 + 1,6^2) - 1,8 : 90$;

2) $\left(4\frac{7}{12} - 3\frac{17}{36}\right) : 1\frac{2}{3} + 4\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{26}\right) + 2,5$;

3) $-5\frac{5}{6} : \frac{7}{18} - \left(-3\frac{1}{8}\right) \cdot (-0,8) + (-3,6)$.

51. Розставте дужки у виразі $48 - 12 \cdot 3 + 39 - 40 : 4$ так, щоб отримати значення:

1) 1502; 2) 2,75.

52. Розставте дужки у виразі $7 - 18 : 9 + 31$ так, щоб вираз набував від'ємного значення.

53. У 7-А класі навчається 25 учнів, у 7-Б — на 3 учні більше, ніж у 7-А, а в 7-В — на 5 учнів менше, ніж у 7-Б. Скільки всього учнів навчається у цих класах? Складіть числовий вираз і знайдіть його значення.

54. Учні школи взяли участь в озелененні міста. Учні



7-А класу висадили 12 дерев, учні 7-Б — на 4 дерева менше, а учні 7-В — на 5 дерев менше, ніж учні 7-А і 7-Б класів разом. Скільки всього дерев висадили учні цих класів? Складіть числовий вираз і знайдіть його значення.

55. Діти зібрали їстівні гриби — маслянки, лисички й



білі гриби — та розклали їх у три кошики у відношенні 3 : 2 : 1. Скільки білих грибів зібрали діти, якщо загалом було зібрано 114 грибів? Складіть числовий вираз і знайдіть його значення.

56. У бензобак автівки вміщується 45 л бензину. Ви-



трати бензину становлять 8,5 л на кожні 100 км шляху. Автівка вирушила в подорож з повним бензобаком і проїхала 300 км. Обчисліть, скільки літрів бензину залишилось у бензобаку після закінчення подорожі. Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.

57*. У виразі $1,5 - \frac{1}{4} : 3\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 4,5^2$ розставте дужки так, щоб значення виразу було: 1) найбільшим; 2) найменшим.

58*. Обчисліть зручним способом:

1) $9 + 99 + 999 + 9999 + 99\,999$;

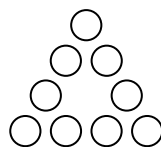
2) $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 7 \cdot 8 \cdot 9}{7 \cdot 8 \cdot 9 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$;

3) $\frac{101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot 104 - 100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103}{102 \cdot 103 \cdot 104 \cdot 105 - 101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot 104}$;

4) $\left(\left(2 - \frac{1}{7} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) - \dots - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right) : \frac{5}{14}$;

5) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 999 - 1000$.

59*. Як записати в кружечки числа від 1 до 9 (мал. 3) так, щоб їх сума за кожною стороною трикутника дорівнювала 20?



Мал. 3

Проявіть компетентність



60. Родина Миколи вирішила обгородити парканом свою ділянку. Ширина ділянки дорівнює 60 м, а її довжина — на 25 м більша. Яку кількість листів профнастилу завширшки 0,95 м необхідно закупити для огорожі цієї ділянки? Складіть числовий вираз і знайдіть його значення.



61. Складіть задачу про свій вік і вік інших членів своєї родини. Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.

§ 2. ВИРАЗИ ЗІ ЗМІННИМИ

Ситуація. Батьки Василя вирішили розмістити 10 000 грн на депозит у банку під певний відсоток річних. Щоб допомогти батькам, Василь склав вираз для обчислення річного прибутку за вкладом. Оскільки в різних банках річний відсоток відрізнявся, Василь позначив його буквою r і отримав вираз:



qr.orioncentr.com.ua/hPbgc

$$10\,000 \cdot 0,01r.$$

Вираз, який отримав Василь, містить букву, значення якої змінюється залежно від різних обставин, тому її називають *змінною*, а сам вираз — *виразом зі змінною*.



Чи кожний буквенний вираз є виразом зі змінною?

Ні.



Наприклад, буквенний вираз 2π не є виразом зі змінною, оскільки π — константа (стале число).

Запам'ятайте!

Вираз зі змінною — це запис, у якому використовують букви, що позначають змінні, числа, знаки арифметичних дій і дужки.

Задача 1 Знайдіть значення виразу:

- 1) $10a - 1,2$, якщо: а) $a = 0,1$; б) $a = -11$; в) $a = -0,5$;
- 2) $5a + 5b - 5c$, якщо $a + b - c = -2$.

Розв'язання

1. Якщо $a = 0,1$, то $10 \cdot 0,1 - 1,2 = -0,2$.
Якщо $a = -11$, то $10 \cdot (-11) - 1,2 = -111,2$.
Якщо $a = -0,5$, то $10 \cdot (-0,5) - 1,2 = -6,2$.
2. Якщо $a + b - c = -2$, то
 $5a + 5b - 5c = 5(a + b - c) = 5 \cdot (-2) = -10$.



Значення виразу зі змінними залежить від значень змінних, що входять до нього.



Чи завжди можна обчислити значення виразу зі змінною?



Ні.

Наприклад, значення виразу $\frac{7x}{x-3}$

неможливо обчислити, якщо $x = 3$, оскільки знаменник дробу перетворюється на 0 і вираз втрачає зміст.



Коротко записують так: ОДЗ змінної: $x \neq 3$.



Усі значення змінної, допустимі для даного виразу, утворюють *область допустимих значень* (ОДЗ) змінної цього виразу.

Задача 2 Знайдіть ОДЗ змінної виразу:

1) $19x + \frac{13-x}{x-5}$; 2) $\frac{(2x-1)(3x+4)}{12}$.

Розв'язання

Вираз	$19x + \frac{13-x}{x-5}$	$\frac{(2x-1)(3x+4)}{12}$
Чи є ділення на вираз зі змінною	є, на $x - 5$	немає
ОДЗ змінної	$x \neq 5$	x — будь-яке число

Якщо вираз містить лише дії додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до квадрата, куба чи іншого степеня з натуральним показником (про такі степені дізнаєтесь у § 5), то такий вираз називають *раціональним*. Раціональні вирази, своєю чергою, поділяють на *цілі* й *дробові* вирази (табл. 3).

Таблиця 3

Вид раціонального виразу	Приклад
Цілий раціональний вираз	$(7 - x^2) : 2; \frac{2 + 3y}{30}; 3m^2 - 4n^3 + \frac{2n}{5}$
Дробовий раціональний вираз	$(7 - x^3) : 2x; \frac{2 + 3y}{30y}; 3m^2 - 4n^3 + \frac{2n}{5m}$

Запам'ятайте!

Вираз називається *цілим*, якщо він не містить дію **ділення на вираз зі змінними**.



У цілого раціонального виразу ОДЗ кожної змінної — будь-яке число.



Коротко записують так: ОДЗ змінної: x — будь-яке число.

Цілі раціональні вирази використовують для запису багатьох відомих вам формул, наприклад:

$s = vt$ — формула шляху, пройденого учасником руху зі швидкістю v за час t ;

$P = 2(a + b)$ — формула периметра прямокутника зі сторонами a і b ;

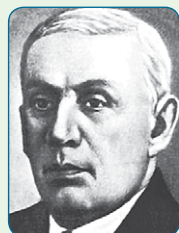
$S = ab$ — формула площі прямокутника зі сторонами a і b ;

$S = \pi r^2$ — формула площі круга з радіусом r .

Дізнайтеся більше

Граве Дмитро Олександрович (1863–1939) — видатний математик, фундатор вітчизняної алгебраїчної школи, академік Всеукраїнської академії наук (ВУАН) (1919). Працював професором Харківського (1897), а потім Київського (1899) університетів. У 1934 став першим директором Інституту математики.

qr.orioncentr.com.ua/zlZRd



Словничок

qr.orioncentr.com.ua/TmtN4

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
вираз зі змінною	variable expression	Ausdruck mit Variable	expression avec variable

Пригадайте головне

1. Що називається виразом зі змінною? Наведіть приклади.
2. Поясніть, як обчислити значення виразу зі змінною.
3. Що таке допустимі значення змінної для виразу зі змінною?
4. Які вирази називають раціональними?
5. Які вирази називають цілими?

Усне тренування

Обчисліть:

$$2,5 \cdot 2; \quad \frac{2}{3} - (-6); \quad -0,02 : 10; \quad -0,25 + (-8).$$

Розв'яжіть задачі

62'. Чи є даний запис виразом зі змінними:

- 1) $x = 1$; 3) $2\pi : 5$; 5) $m > 15$;
 2) $\frac{2c}{c-1}$; 4) $10 - 7z$; 6) $\frac{1}{2}a \neq \frac{6}{b}$?

63'. Прочитайте вираз:

- 1) $5a + 6b$; 3) $m - 25n$; 5) $3abc$;
 2) $15 \cdot 2,4 + 17$; 4) $4^2 : 4^3$; 6) $2\pi R$.

Чи є даний вираз виразом зі змінними? Відповідь поясніть.

64'. Чи є даний вираз цілим:

- 1) $a + 4,5b$; 3) $(m - n) : 5n$; 5) $\frac{abc}{3}$;
 2) $\frac{2m}{27}$; 4) $\frac{x-15}{5}$; 6) $\frac{1}{3}x + \frac{4}{x}$?

65°. Обчисліть значення виразу:



1) $2a - 5b$, якщо $a = -\frac{3}{4}$ і $b = -0,3$;

2) $8m + 6n - 7$,

якщо $m = -6$ і $n = \frac{5}{12}$;

3) $5 - 7c - 9d$, якщо $c = -\frac{3}{14}$ і $d = 0,3$;

4) $|x + 2y| - |2x - y|$, якщо $x = 2,5$ і $y = 0,7$.



qr.orioncentr.com.ua/m9ebo

66°. Обчисліть значення виразу:

1) $0,5x - 1,1$, якщо $x = 1,2$;

2) $\frac{5}{6}x + 2,3y$, якщо $x = -0,4$ і $y = -19$.

67°. Запишіть у вигляді виразу:

1) сума добутку та частки виразів a і b ;

2) різниця квадратів виразів m і n ;

3) подвоєний добуток виразів $5a$ і b ;

4) вираз, протилежний до суми виразів $3c$ і $7d$;

5) вираз, обернений до різниці виразів $9m$ і $5n$;

6) квадрат суми виразів $2x$ і $5y$;

7) квадрат різниці виразів $6a$ і $3b$.

68°. Запишіть у вигляді виразу:

1) добуток виразів a і b ;

2) частка виразів $6x$ і y ;

3) добуток суми виразів $2ab$ і $3c$ та їх різниці.

69°. За даними таблиці 4 знайдіть значення виразів:

Таблиця 4

a	10	8,4	0,75	$-\frac{1}{2}$
b	-5	4,8	0,06	10
$2a + 0,5b$				
$(a - 2b) : 4$				

70°. Знайдіть значення виразу $3c - 0,4d$, якщо:

- 1) $c = 9, d = -50$; 2) $c = 3,6, d = 3$.

71°. За даними таблиці 5 знайдіть значення виразів:

Таблиця 5

c	9	3,6	1,75	0,81
d	-50	3	-8	0,125
$3c - 0,4d$				

72°. Прочитайте вирази зі змінними. Назвіть цілі й дробові вирази. Відповідь обґрунтуйте.

- 1) $2,4 + (7 - a)$; 3) $a - \frac{b}{c}$; 5) $(2a)^2 - (5b)^2$;
 2) $-5(b - 2,8)$; 4) $\frac{a+3}{b}$; 6) $(3c + 5d)^2$.

73°. Прочитайте вирази зі змінними. Назвіть цілі й дробові вирази. Відповідь обґрунтуйте.

- 1) $x + yz$; 2) $\frac{2}{a} - \frac{b}{5}$; 3) $(f + k)^3$.

74°. Знайдіть область допустимих значень змінної виразу:

- 1) $3(x - 19)$; 3) $\frac{z-2}{4}$;
 2) $\frac{4-y}{y}$; 4) $\frac{7}{9}y$.

75°. У числовому виразі $\frac{3 \cdot 4 + 10 : 4}{4 \cdot 2}$ замініть число 4 на букву a . Чи всі значення змінної a є допустимими для одержаного виразу?

76°. Друзі виїхали з міста на велосипедах зі швидкістю v км/год і проїхали з такою швидкістю 2 год. Збільшивши швидкість на 2 км/год, вони їхали ще 1,5 год. Яку відстань проїхали друзі за весь час подорожі? Складіть вираз і обчисліть його значення, якщо $v = 12$ км/год.





77°. У магазин завезли a кг динь за ціною p_1 грн за 1 кг і b кг гарбузів за ціною p_2 грн за 1 кг. Запишіть у вигляді виразу:

- 1) вартість завезеної партії динь;
- 2) вартість завезеної партії гарбузів;
- 3) який відсоток ціни динь становить ціна гарбузів;
- 4) на скільки відсотків вартість завезеної партії динь більша за вартість завезеної партії гарбузів.



78°. Зошит коштує a грн, а блокнот — на 7 грн більше. Скільки гривень коштують 5 таких зошитів і 10 блокнотів разом? Складіть вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення, якщо $a = 3$.



79°. Довжина футбольного поля прямокутної форми, де тренуються учні 7-х класів, дорівнює a м, а його ширина — b м. Який зміст має вираз:

- 1) ab ;
- 2) $2(a + b)$;
- 3) $a - b$;
- 4) $\frac{a}{b}$;
- 5) $\frac{a}{b} \cdot 100\%$;
- 6) $\frac{b}{a} \cdot 100\%$?

80. Утворіть вираз зі змінною c , який має зміст:

- 1) для всіх значень змінної;
- 2) для всіх значень змінної, окрім $c = 0$;
- 3) для всіх значень змінної, окрім $c = 2$ і $c = 1\frac{1}{2}$.

81. Укажіть ОДЗ змінних і знайдіть значення виразу:

- 1) $6a + 4b$, якщо $a = 1,3$, $b = -0,25$;
- 2) $0,4c - 4d^2 + 4,5$, якщо $c = -20$, $d = 0,5$;
- 3) $\frac{2(ab + 4) + c}{11}$, якщо $a = -2,8$, $b = 10$, $c = 0,7$;
- 4) $\frac{\left(1,25k + 1\frac{1}{4}t\right) \cdot 2\frac{1}{2}}{h - 5\frac{1}{3}}$, якщо $k = 1\frac{1}{8}$, $t = -1\frac{1}{8}$, $h = 1,5$.

- 82.** Укажіть ОДЗ змінних і знайдіть значення виразу $-5,4a + 6b - 12$, якщо $a = 3$, $b = -0,15$.
- 83*.** Запишіть у вигляді виразу і, за можливості, спростіть його:
- 1) суму трьох послідовних натуральних чисел, найменше з яких дорівнює n ;
 - 2) добуток двох послідовних парних натуральних чисел, менше з яких дорівнює $2n$;
 - 3) подвоєний добуток двох послідовних натуральних чисел, більше з яких дорівнює n .
- 84*.** Знайдіть ОДЗ змінної виразу:
- 1) $\frac{2}{2 - \frac{2}{x}}$;
 - 2) $\frac{4}{4 - \frac{4}{x}}$.

Проявіть компетентність



- 85.** На малюнку 4 зображено схему розміщення споруд, призначених для очищення стічних вод. Радіус кожної очисної водойми становить r м. Знайдіть довжину огорожі прямокутної ділянки та її площу.



Мал. 4



- 86.** На придбання меблів для кабінету виділено кошти. Розрахуйте варіанти мінімальної та максимальної вартості комплекту, що містить a столів, b стільців, c шаф і d стелажів, якщо вартість столів становить 450–550 грн, стільців — 120–135 грн, шаф — 1200–1500 грн, а стелажів — 800–950 грн. Урахуйте, що для оптових покупців діє знижка 10 %. Обчисліть мінімальну та максимальну вартості покупки, якщо $a = 6$, $b = 6$, $c = 1$, $d = 3$.

§ 3. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ

1. Тотожно рівні вирази

Ситуація. Петро Іванович запропонував учням порівняти по два вирази. Для цього треба було обчислити їх значення за різних значень змінної. Сергій порівнював вирази $x^2(x^2 + 2x)$ і $13x^2 + 14x - 24$, а Марія — вирази $7(x^2 + 5x)$ і $7x^2 + 35x$. Отримані учнями результати показано в таблицях 6 і 7.



qr.orioncentr.com.ua/zojJG

Сергій

Таблиця 6

x	-2	0	1	3
$x^2(x^2 + 2x)$	0	0	3	135
$13x^2 + 14x - 24$	0	-24	3	135

Марія

Таблиця 7

x	-2	0	1	3
$7(x^2 + 5x)$	-42	0	42	168
$7x^2 + 35x$	-42	0	42	168



Чи можна поставити знак « $=$ » між виразами, які порівнював Сергій?

Ні.



Значення цих виразів рівні лише за деяких значень змінної. Зокрема рівність не виконується для $x = 0$. Відтак, знак рівності між цими виразами поставити не можна.



Чи можна поставити знак « $=$ » між виразами, які порівнювала Марія?

Так.



Значення цих виразів рівні за будь-яких значень змінної (за розподільним законом множення відносно додавання). Тому знак рівності між цими виразами поставити можна. Такі вирази є тотожно рівними.

Запам'ятайте!

Якщо два вирази набувають відповідно рівних значень за будь-яких значень їхніх змінних, то такі вирази називають *тотожно рівними*.



Чи є тотожно рівними вирази:

$$\frac{2x^2}{2x} \text{ і } x?$$

Вирази $\frac{2x^2}{2x}$ і x **не є тотожно рів-**

ними, оскільки за $x = 0$ перший вираз втрачає зміст, а другий — ні.

Ні.



Коротко записуємо: ОДЗ-1: $x \neq 0$;

ОДЗ-2: x — будь-яке число.



Перевіряючи, чи є вирази зі змінними тотожно рівними, спочатку потрібно впевнитися, що їх ОДЗ збігаються.



Надалі в 7 класі розглядатимемо тільки цілі вирази.

Заміну виразу тотожно рівним йому виразом називають *тотожним перетворенням виразу*. Тотожні перетворення виразів виконують для *спрощення виразів*.

2. Зведення подібних доданків

Одним із тотожних перетворень виразів є *зведення подібних доданків*. З таким тотожним перетворенням виразів ви знайомі з 6-го класу.



Які доданки у виразі вважаються подібними?

З однаковою буквеною частиною.



Наприклад, у виразі $a - x + 3 - 2a$ подібними є доданки a і $-2a$.

Задача 1 Зведіть подібні доданки: $5 - x + 7y - 4x - 7y$.

Розв'язання

Запишемо вираз: $5 - x + 7y - 4x - 7y =$
 Виявимо подібні доданки: $= 5 - x + 7y - 4x - 7y =$
 Зведемо подібні доданки: $= 5 - 5x + 0 =$
 Запишемо результат: $= 5 - 5x$.



Подібні доданки, у яких коефіцієнти є протилежними числами, *взаємно знищуються*.

3. Розкриття дужок

Розкриття дужок є одним із тотожних перетворень виразів.



Правила розкриття дужок ґрунтуються на розподільному законі множення відносно додавання.

Правила розкриття дужок

Якщо перед дужками стоїть:	то доданки в дужках:
знак «+»	знаки зберігають
знак «-»	знаки змінюють на протилежні
числовий множник або вираз зі змінними	множать на цей множник

Задача 2 Спростіть вираз $2x(y - 4) - 5(xy - 3x)$.

Розв'язання

Запишемо вираз: $2x(y - 4) - 5(xy - 3x) =$
 Розкриємо дужки: $= 2xy - 8x - 5xy + 15x =$
 Виявимо подібні доданки: $= 2xy - 8x - 5xy + 15x =$
 Зведемо подібні доданки: $= -3xy + 7x$.



Щоб спростити вираз із дужками, спочатку розкрийте дужки, а потім зведіть подібні доданки.

4. Винесення спільного множника за дужки

Ще одним тотожним перетворенням виразів є *винесення спільного множника за дужки*. Спільним множником може бути число або вираз зі змінною.



qr.orioncentr.com.ua/d0F9U

Задача 3 Винесіть спільний множник за дужки:

$$16mn + 36n.$$

Розв'язання

Запишемо вираз:

$$16mn + 36n =$$

Виявимо спільний множник: $= 4m \cdot 4n + 9 \cdot 4n =$

Винесемо спільний множник: $= 4n(4m + 9).$

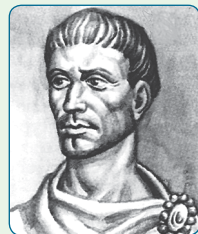


Щоб перевірити, чи правильно винесено спільний множник за дужки, виконайте обернену дію — розкрийте дужки.

Дізнайтеся більше

Позначення невідомих величин за допомогою букв уперше зустрічається в записах у **Діофанта Александрійського** (бл. III ст.). Невідому величину Діофант називає «число» (ἀριθμός) і позначає літерою ζ, квадрат невідомої — символом δν (скорочення від δύναμις — «ступінь»).

qr.orioncentr.com.ua/C5X5q



Діофант

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/LcdWL

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
спростити алгебраїчний вираз	simplifying algebraic expression	Verein- fachung algebraischer Ausdrücke	simplifier une expression algébrique

Пригадайте головне

1. Які вирази називають тотожно рівними?
2. Що називають тотожним перетворенням виразу?
3. Для чого виконують тотожні перетворення виразів?
4. Які доданки називають подібними? Як зводять подібні доданки?
5. Як розкривають дужки, якщо перед дужками стоїть знак «+»; знак «-»?

Усне тренування

Обчисліть:

- 1) $0,25 \cdot 4^2$; $(-6)^2 : 0,1$; $(-0,3)^2 + 4^3$; $-44,73 - 55,27$.
 2) $0,7 \cdot 1,3 + 19,3 \cdot 1,3$; $-11,3 \cdot 9,1 - 9,1 \cdot 8,7$.

Розв'яжіть задачі

87'. Серед даних виразів оберіть той, що є тотожно рівним виразу $3x - 1$:

- 1) $1 - 3x$; 3) $2x + x - 1$;
 2) $2x \cdot x - 1$; 4) $3x + 1$.

88'. Серед даних виразів оберіть той, що НЕ є тотожно рівним виразу $-18a - 4$:

- 1) $\frac{18a+4}{-1}$; 3) $-4 - 18a$;
 2) $-2a(9a + 2)$; 4) $-18a + 4$.

Обґрунтуйте свій вибір.

89'. Наведіть приклади тотожно рівних виразів, що є:

- 1) сумою; 2) різницею; 3) добутком; 4) часткою.

90'. Чи є тотожно рівними вирази:



- 1) $x + x$ і $2x$;
 2) $y \cdot y$ і y^2 ;
 3) $3c + 7d$ і $3d + 7c$;
 4) $1 + 2x$ і $2x + 1$;
 5) $3 - 6k$ і $6k - 3$;
 6) $4 \cdot 5m$ і $5 \cdot 4n$;
 7) $3y^2$ і $(6y^3) : (2y^2)$?

Відповідь поясніть.


qr.orioncentr.com.ua/AiLM4

91°. Чи є тотожно рівними вирази:

- 1) $5a + 6a$ і $11a$; 3) $5ab : a$ і $5b$;
 2) $12c \cdot 2d$ і $18cd$; 4) $(4n + 5n) : 3$ і $3n$?

92°. Спростіть вираз:

- 1) $0,2a \cdot 6$; 5) $-8a \cdot (-0,4bc)$;
 2) $7c \cdot 0,5d$; 6) $12t \cdot 5p \cdot (-4k)$;
 3) $-3m \cdot 4n$; 7) $\frac{3}{16}a \cdot \frac{4}{21}b$;
 4) $10x \cdot (-1,1yz)$; 8) $10\frac{1}{2} \cdot 9\frac{1}{3}xy$.

Який закон множення ви використали?

93°. Спростіть вираз:

- 1) $a \cdot 14b$; 3) $-5m \cdot 1,4n$;
 2) $0,2c \cdot 8d$; 4) $-7xy \cdot (-0,05z)$.

94°. Зведіть подібні доданки у виразі:

- 1) $12a + 23a$; 5) $1,1a - a - b - 0,9b$;
 2) $46c - c$; 6) $0,8x + 2,6y - 2,1x + y$;
 3) $16n + 4n + 12$; 7) $6\frac{1}{7}p - 2\frac{2}{15}q - 8\frac{5}{14}p - 1\frac{1}{3}q$;
 4) $0,8k + 10,2k - 4,5$; 8) $8\frac{2}{3}c + 1\frac{11}{24}k + \frac{13}{36}k - 4\frac{8}{9}c$.

95°. Зведіть подібні доданки у виразі:

- 1) $15a - a$;
 2) $19x + 23x - 11$;
 3) $10a - a - b - 9b$;
 4) $19 - 5m - n + 1,3m + 1,8n$.

96°. Розкрийте дужки:

- 1) $2 \cdot (a - 4)$; 7) $-x \cdot (5 - y)$;
 2) $1,5 \cdot (b + 2)$; 8) $(12a + 5) \cdot (-b)$;
 3) $-5 \cdot (6 - c)$; 9) $-6x \cdot (y - 3)$;
 4) $-0,4 \cdot (d + 2)$; 10) $(2n - m) \cdot (-5p)$;
 5) $a \cdot (8 - 1,2b)$; 11) $3t \cdot (5p + k + 6)$;
 6) $(n - 0,5) \cdot m$; 12) $(2p - 4k + 6t) \cdot 2a$.

Які закони арифметичних дій ви використали?

97°. Розкрийте дужки:

- 1) $7 \cdot (a - 2)$; 4) $-n \cdot (0,5 - m)$;
 2) $-0,2 \cdot (b - 15)$; 5) $2x \cdot (-5 + y)$;
 3) $c \cdot (d - 10)$; 6) $(3a - 2b + 1) \cdot (-c)$.

98°. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

- 1) $a - (a - b)$; 4) $2(k + p) - 3(k - p)$;
 2) $4c + (5c - 4d)$; 5) $-5(x - y + z) + 4(-x + y - z)$;
 3) $(n - m) - (m - n)$; 6) $c - (b - a) + (a - b - c)$.

99°. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

- 1) $(c - d) - 2d$;
 2) $2x - (3y - 2x)$;
 3) $4(a - b) - 2(b - a)$;
 4) $(n - 3m) - (4n - 6m)$.

100°. У квітковому магазині замовили 3 букети з гербе-рами за ціною p грн за кожний і 5 букетів з тро-яндами, ціна яких на 16 грн більша. Скільки гри-вень заплатили за всі букети? Складіть вираз для розв'язування задачі та спростіть його.



101°. Садово-дослідна станція протягом року продала споживачам 120 однорічних саджанців яблунь за ціною x грн за штуку та 160 дворічних саджанців яблунь, ціна яких на 25 грн більша. Скільки гри-вень заплатили покупці за всі саджанці? Складіть вираз для розв'язування задачі та спростіть його.



102°. Середнє арифметичне показників температури повітря за 2 дні вересня дорівнює a °C, температу-ра більш теплого дня на 4 °C вища за температуру більш прохолодного дня. Знайдіть, якою була тем-пература повітря більш прохолодного дня. Складіть вираз для розв'язування задачі та спростіть його.



103°. Середнє арифметичне двох чисел дорівнює a , одне із цих чисел на 12 менше від іншого. Знайдіть мен-ше із цих чисел. Складіть вираз для розв'язування задачі та спростіть його.

104°. Винесіть спільний множник за дужки:



- 1) $11a + 11b$;
- 2) $-4c + 12d$;
- 3) $5m - m$;
- 4) $-3x + 2x$;
- 5) $ab - ac$;
- 6) $nm^2 - mn^2$;
- 7) $5ab + 15b^2$;
- 8) $-4x - 12y - 8z$;
- 9) $4a - 6b + 8c - 2$;
- 10) $pk + 12k - 6tk$;
- 11) $-7y + xy - y^2$;
- 12) $3a^2y - 12y^2 + 21y$;
- 13) $-80c^2a - 20ac - 60ca^2$;
- 14) $6p^2t^2 + 4pt^2 - 2pt$.



qr.orioncentr.com.ua/JeDgF

105°. Винесіть спільний множник за дужки:

- 1) $6a - 6b$;
- 2) $-5c - 20d$;
- 3) $3xy + 9x$;
- 4) $-4n - 6nm + 2np$.

106°. Подайте вираз у вигляді добутку:

- 1) $\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}xy$;
- 2) $1,5ab - 0,3a$;
- 3) $-2,7cd - d$;
- 4) $-\frac{1}{3}kl - \frac{1}{18}l$;
- 5) $0,2ab + 0,4bc + 1,6b$;
- 6) $ax^2 + ax - a^2x$;
- 7) $5,5ax - 0,11x^2$;
- 8) $axy^2 - a^2xy - 3ax$.

107°. Перетворіть вираз у добуток:

- 1) $4,9xy - 1,4xz + 7yz$;
- 2) $1\frac{4}{5}abcd - 9$.

108°. Знайдіть значення виразу:

- 1) $15a + 3b$, якщо $5a + b = 19$;
- 2) $(15a + 3b) \cdot c$, якщо $5a + b = 19$, $c = 2$;
- 3) $-2x - 9y$, якщо $18x + 81y = -27$;
- 4) $-a(2x + 9y)$, якщо $18x + 81y = -27$, $a = -2$;
- 5) $-(14x - 28y)$, якщо $x - 2y = -3$;
- 6) $14xz - 28yz$, якщо $x - 2y = -3$, $z = 0,2$.

109°. Знайдіть значення виразу:

1) $15c - 3d$, якщо $5c - d = -3$;

2) $-12mn + 18mp$, якщо $m = 0,5$, $2n - 3p = -8$.

110. Спростіть вираз:

1) $11 - (x - (2x - 4)) + 19$;

2) $9c - ((d - c) + 11d)$;

3) $-12m - (11m - (10m + 1)) - 14$;

4) $3a - 0,2(-6b + 2a) - 0,5(a - 4b)$.

111. Під час відкриття ресторану швидкого харчування страва коштувала x грн, в обідній час її ціна зросла на 15 %, а після 20.00 — зменшилася на 20 % порівняно з обіднім часом. На скільки гривень збільшилася (зменшилася) ціна страви після 20.00 порівняно з вранішнім часом? Складіть вираз для розв'язування задачі та спростіть його.



112. Початкова ціна товару становила p тис. грн, а під час акції знизилася на 5 тис. грн. На скільки відсотків знизилася ціна товару під час цієї акції? Складіть вираз для розв'язування задачі.



113. Який множник треба записати замість зірочки, щоб вирази стали тотожно рівними:

1) $2ma + 2mb$ і $* \cdot (a + b)$;

2) $-mn - mp$ і $* \cdot (n + p)$;

3) $3ab + 3ac - 6ad$ і $* \cdot (b + c - 2d)$;

4) $4a^2b - 6a^2c + 12da^2$ і $* \cdot (2b - 3c + 6d)$?

114. Який множник треба записати замість зірочки, щоб вирази стали тотожно рівними:

1) $ca + 2cb$ і $* \cdot (a + 2b)$;

2) $-xyz + xyf - xyt$ і $* \cdot (z - f + t)$?

115. Відомо, що для деяких значень c і d значення виразу $c + d$ дорівнює $\frac{2}{3}$. Якого значення за тих самих значень c і d набуває вираз: 1) $6c + 6d - 6$; 2) $(-2c - 2d) : 0,4$?

- 116.** Відомо, що $a + 3b = 6$ і $c = 4$. Знайдіть значення виразу:
- 1) $a + 3(b + c)$;
 - 2) $6b + 2(a - 5c)$.
- 117*.** Складіть вираз для знаходження: 1) суми чотирьох послідовних цілих чисел, найменше з яких дорівнює n ; 2) суми трьох послідовних парних цілих чисел, найбільше з яких дорівнює a ; 3) суми чотирьох послідовних непарних чисел, найменше з яких дорівнює $2n + 1$; 4) суми п'яти цілих чисел, кратних числу 5, узятих послідовно за зростанням. Спростіть отриманий вираз.
- 118*.** Який вираз потрібно записати замість зірочки, щоб вирази стали тотожно рівними:
- 1) $4a(* + 4,5c)$ і $10ab + *$;
 - 2) $3,6ac - *$ і $6c(* - 3bc)$;
 - 3) $* + 5\frac{2}{3}yz$ і $\frac{1}{6}y(15xy + *)$?
- 119*.** Відомо, що число a кратне числу 5, а число b кратне числу 6. Доведіть, що число $6a + 5b$ кратне числу 30. Утворіть із чисел a і b вираз, що задає число, кратне числу 60.

Проявіть компетентність



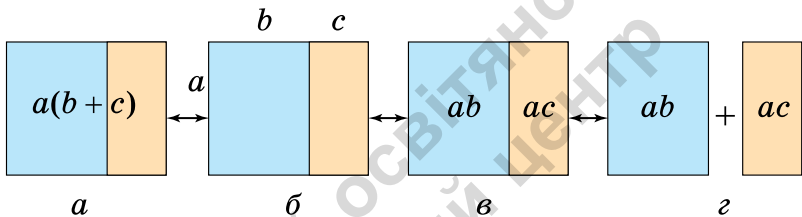
- 120.** Складіть вираз щодо витрат Тетяною часу на виконання домашнього завдання, якщо: 1) на англійську мову вона витратила a хв; 2) на математику — в 1,5 рази більше, ніж на англійську мову; 3) на українську літературу — на 10 хв більше, ніж на математику. Скільки часу виконувала домашнє завдання Тетяна, якщо завдання з англійської мови вона виконала за 20 хв?
- 121.** Складіть задачу, подібну до попередньої, за вашими власними витратами часу.

§ 4. ТОТОЖНІСТЬ

1. Що таке тотожність?

Ситуація. Наталя пригадала, що розкриття дужок і винесення спільного множника за дужки є тотожними перетвореннями виразів. Вони ґрунтуються на розподільному законі множення відносно додавання. Сергій проілюстрував цю властивість множення (мал. 5) і записав рівність:

$$a(b + c) = ab + ac.$$



Мал. 5



Як міркував Сергій?

Склав вирази для обчислення площі прямокутників на малюнках 5, 6 і 5, в та порівняв їх.



Отже, Сергій отримав *рівність*, ліва та права частини якої є *тотожно рівними виразами*.

Запам'ятайте!

Рівність, ліва і права частини якої є тотожно рівними виразами, називається тотожністю.

Правильні числові рівності, такі як: $1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 - 10 : 2 + 4^2$ або $2 \cdot 2 = 2^2$, є *числовими тотожностями*.

Задача 1 Чи може бути тотожністю рівність:

1) $x + x = 2x$; 2) $(a - 1) \cdot a : (a - 1) = a$?

Розв'язання

1) $x + x = 2x$.

Визначимо ОДЗ змінної: ОДЗ-1: x — будь-яке число,ОДЗ-2: x — будь-яке число.Порівняємо ОДЗ змінної: ОДЗ-1 і ОДЗ-2 **збігаються**Висновок: рівність **може бути тотожністю**.

2) $(a - 1) \cdot a : (a - 1) = a$.

Визначимо ОДЗ змінної: ОДЗ-1: $a \neq 1$,ОДЗ-2: a — будь-яке число.

Порівняємо ОДЗ змінної:

ОДЗ-1 і ОДЗ-2 **не збігаються**Висновок: рівність **не може бути тотожністю**.Чи завжди є тотожністю рівність,
у якої ОДЗ-1 і ОДЗ-2 збігаються?

Ні.

Наприклад, рівність $0 \cdot x = x$ не є тотожністю.**Довести тотожність — означає довести тотожну рівність її лівої та правої частин.****2. Способи доведення тотожності**

Розглянемо чотири способи доведення тотожностей.

qr.orioncentr.com.ua/R7tn2**Задача 2** Доведіть тотожність

$$3(b + 2) - b = 3b + 5 - (b - 1).$$

Розв'язання**Спосіб 1 (перетворення лівої частини рівності).**

Перетворимо вираз у лівій частині даної рівності так, щоб він набув вигляду виразу в її правій частині:

$$\begin{aligned}
 3(b + 2) - b &= \\
 &= 3b + 6 - b = \\
 &= 3b + 5 + 1 - b = \\
 &= 3b + 5 - b + 1 =
 \end{aligned}$$

$$= 3b + 5 - (b - 1).$$

Отже, $3b + 5 - (b - 1) = 3b + 5 - (b - 1)$.

Звідси $3(b + 2) - b = 3b + 5 - (b - 1)$, що і вимагалось довести.

Спосіб 2 (перетворення правої частини рівності).

Перетворимо вираз у правій частині даної рівності так, щоб він набув вигляду виразу в її лівій частині:

$$\begin{aligned} 3b + 5 - (b - 1) &= \\ &= 3b + 5 - b + 1 = \\ &= 3b + 6 - b = \\ &= 3(b + 2) - b. \end{aligned}$$

Отже, $3(b + 2) - b = 3(b + 2) - b$.

Звідси $3(b + 2) - b = 3b + 5 - (b - 1)$, що і вимагалось довести.

Спосіб 3 (перетворення обох частин рівності).

qr.orioncentr.com.ua/SNtRc



Перетворимо вирази в обох частинах даної рівності так, щоб вони набули одного й того самого вигляду:

$$\begin{array}{ll} 1) \ 3(b + 2) - b = & 2) \ 3b + 5 - (b - 1) = \\ & = 3b + 6 - b = \\ & = 2b + 6. \end{array}$$

Отже, $2b + 6 = 2b + 6$.

Звідси $3(b + 2) - b = 3b + 5 - (b - 1)$, що і вимагалось довести.

Спосіб 4 (різницеve порівняння).

Перевіримо, чи дорівнює нулю різниця виразів у лівій і правій частинах даної рівності:

$$\begin{aligned} 3(b + 2) - b - (3b + 5 - (b - 1)) &= \\ &= 3b + 6 - b - (3b + 5 - b + 1) = \\ &= 2b + 6 - (2b + 6) = \\ &= 2b + 6 - 2b - 6 = 0. \end{aligned}$$

Звідси $3(b + 2) - b = 3b + 5 - (b - 1)$, що і вимагалось довести.

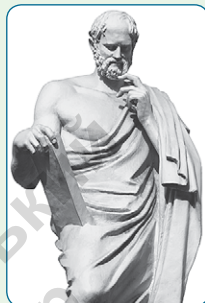


Для доведення тотожності можна скористатися будь-яким із цих чотирьох способів.

Дізнайтеся більше

Доведення вважають єдиним способом встановлення істини в математиці. Проте так було не відразу. Спочатку в єгипетській і вавилонській математиці обчислювальні формули та математичні факти вгадувались, а потім експериментально перевірялись. Це вважали доказом їх істинності.

Необхідність доведення обґрунтував давньогрецький математик **Евклід** (III ст. до н. е.). Він вважав, що доведення мають бути логічними висновками з аксіом — тверджень, що приймають без доведення. У результаті з'явилися знамениті «Начала» Евкліда. qr.orioncentr.com.ua/j4ntN



Статуя Евкліда в музеї природничої історії Оксфордського університету

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/C5xj4

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
тотожність	identity	Identität (f)	identité

Пригадайте головне

1. Що таке тотожність?
2. Що означає — довести тотожність?
3. У чому суть способу перетворення лівої частини рівності?
4. Поясніть суть способу перетворення правої частини рівності.
5. У чому суть способу перетворення обох частин рівності?
6. Поясніть суть способу різницевого порівняння.
7. Як спростувати правильність рівності зі змінними?

Усне тренування

Обчисліть усно:

1) $(8,2 + 1,8) \cdot 50$,

$(82 + 18) : 50$;

2) $(25,3 + 4,7) \cdot 0,08$,

$(253 + 47) : 6$;

3) $(0,8 + 3,16) \cdot 100$,

$(0,86 - 0,36) : 10$.

Розв'яжіть задачі

- 122'.** Чи правильно, що тотожністю може бути:
- 1) вираз;
 - 2) нерівність;
 - 3) рівність?
- 123'.** Чи може бути тотожністю рівність зі змінними, у якої:
- 1) ОДЗ-1 і ОДЗ-2 не збігаються;
 - 2) ОДЗ-1 і ОДЗ-2 збігаються?
- 124'.** Чи завжди є тотожністю рівність зі змінними, у якої ОДЗ-1 і ОДЗ-2 збігаються?
- 125°.** Чи є тотожністю запис:
- 1) $a \cdot a - 1$;
 - 2) $3a - 4a \neq 5a$;
 - 3) $a \cdot a - a^2 = 0$;
 - 4) $2a - 2 = a$;
 - 5) $4a - 2a + a = 3a$;
 - 6) $5a^2 - a^2 = 5$?
- 126°.** Чи є тотожністю запис:
- 1) $b + 2 > 0$;
 - 2) $b \cdot \frac{3}{4} - \frac{3b}{4}$;
 - 3) $-3b + 3b = 0$;
 - 4) $4b - 5b + 6b = 5b$?
- 127°.** Чи правильно, що рівність $12 - (5 - 9) = 16$ є тотожністю? Відповідь поясніть. Як змінити цю рівність, щоб вона не була тотожністю?
- 128°.** Чи правильно, що рівність $2 \cdot (10 - 29) = -38$ є тотожністю? Відповідь поясніть.
- 129°.** Що можна записати замість $*$, щоб одержати тотожність:
- 1) $2b + b = *$;
 - 2) $b \cdot * = 0$;
 - 3) $b \cdot b = *$;
 - 4) $2b + * = 0$;
 - 5) $5(8b - 6) = *$;
 - 6) $\frac{9}{15} = \frac{*}{5}$?
- 130°.** Що можна записати замість $*$, щоб одержати тотожність:
- 1) $5a - * = 2a$;
 - 2) $a \cdot * = 1$;
 - 3) $4 \cdot (a - 2) = *$;
 - 4) $7a + * = 0$?

131°. Чи є рівність тотожністю для будь-яких натуральних чисел a і b :



1) $(a + b)^2 = (b + a)^2$;

2) $(a - b)^2 = (b - a)^2$;

3) $2ab = 2(-b)(-a)$;

4) $a^2 + b^2 = (a + b)^2$;

5) $a^2 - b^2 = (a - b)^2$;

6) $|a| = a$;

7) $|a| = -a$;

8) $|a| = -|-a|$?



qr.orioncentr.com.ua/GkDrA

132°. Доведіть тотожність, виконавши перетворення лівої частини рівності:

1) $10a - (6a - 9b) = 4a + 9b$;

2) $2(x - 5y) + (2y - 2x) = -8y$;

3) $(0,7n - 0,6m) - 2(0,4n - 0,3m) = -0,1n$;

4) $5k - (6k + 1) - (6k - 1) = -7k$;

5) $-3cd + 6 = -3(cd - 2)$;

6) $2z^2 - 2z = 2z(z - 1)$;

7) $xy^2 + xy - 3xy^2 = xy(y - 3y + 1)$;

8) $ab - 2a^2b - 6ab^2 = ab(1 - 2a - 3b)$.

Які тотожні перетворення виразів ви виконали?

133°. Доведіть тотожність, виконавши перетворення лівої частини рівності:

1) $17a - 6b + 4(-5a + 4b) = -3a + 10b$;

2) $-2,2(10 - x) + 0,4(30 + x) = -10 + 2,6x$;

3) $7x - 14x^2y = 7x(1 - 2xy)$;

4) $-14n - 18m + 2mn = -2(7n + 9m - mn)$.

Які тотожні перетворення виразів ви виконали?

134°. Доведіть тотожність, виконавши перетворення правої частини рівності:

1) $4(a + b) = 10(a + b) - 6(b + a)$;

2) $c - d = 4(d - c) - 5(d - c)$;

3) $0,2c - 0,36 = 0,1(c - (0,3 - (c - 3,3)))$;

4) $a = -1\frac{2}{7}(a - 7b) + 2\frac{2}{7}a - 9b$.

Які тотожні перетворення виразів ви виконали?

135°. Доведіть тотожність, виконавши перетворення правої частини рівності:

1) $3p - 1 = 2p - (3p - (4p - 1))$;

2) $-6c = 0,8(5c - 3d) - 4(2,5c - 0,6d)$.

136°. Доведіть тотожність, виконавши перетворення обох частин рівності:

1) $9(x + y) = 5(x - y) - (-4x - 14y)$;

2) $12a - 4(3a - 7b) = (4a + b) - (4a - 27b)$;

3) $4,5m + \left(1\frac{1}{3}n + 2,5m\right) - 0,5n = 7\left(m - \frac{1}{7}n\right) + 1\frac{5}{6}n$.

137°. Доведіть тотожність, виконавши перетворення обох частин рівності:

1) $3(2a - 5b) - 11 = 16 - 3(6 + a) + 9(a - b) - 3(2b + 3)$;

2) $\left(2\frac{3}{4}m - 10,4n\right) - 4\left(\frac{3}{16}m - 1,6n\right) = -2(2n - m)$.

138°. Доведіть тотожність за допомогою способу різницевого порівняння:

1) $4,9a - 4(a - 0,6b) = 0,3(3a - 8b)$;

2) $(1,2a^2 - 3a + 1) - (0,2a^2 - 5a - 1) = a(a + 2) + 2$;

3) $0,2a(a + b) - 0,2b(a - b) = 0,2(a^2 + b^2)$;

4) $\left(p - \frac{1}{3}k\right) - \left(3p - \frac{2}{3}k\right) = (k - 2p) - \frac{2}{3}k$.

139°. Доведіть тотожність за допомогою способу різницевого порівняння: $18p - 4(2k + 5p) = -\frac{1}{2}(16k + 4p)$.

140°. Чи є тотожністю рівність:



1) $5a - 2 = a + (4a - 2)$;

2) $14(b - b) = 14$;

3) $(2x - 4y) : 2 = x - 2y$;

4) $6m \cdot (4 + m) : 6mn = (4 + m) : n$?

Відповідь обґрунтуйте.

qr.orioncentr.com.ua/gljIV



141°. Чи є тотожністю рівність:

1) $-c + d - 2c + 2 = -3c + 3d$;

2) $(9k - 6k) : 3k = 3k$?

Відповідь обґрунтуйте.

- 142.** Доведіть чи спростуйте тотожність:
- 1) $a(b - c) - b(a - c) + c(a - b) = 0$;
 - 2) $c(n + m) - c(m - n) = 2n(c + m) - 2mn$;
 - 3) $4(p + 2k) - k(8 - 4p) = 4(k - 2p)$;
 - 4) $1,2c(6 - 2p) = 0,8(9c + 6p) - p(2,4c - 4,8)$.
- 143.** Доведіть чи спростуйте тотожність:
- 1) $a(b - c - d) + a(b + c + d) = 2ab$;
 - 2) $-m(n + 4) + n(m + 4) = 4(m - n)$.
- 144.** Доведіть різними способами тотожність:
- 1) $8(a - b) + 6(b - c) - 4(a - c) = 4a - 2(b + c)$;
 - 2) $2(n + p) - 4m = 2(-n + m) - 6(m - p) + 4(n - p)$.
- 145.** Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:
- 1) $12x - 5(5 + 3x) + 3(x + 4)$;
 - 2) $8,5(y + 2) - 1,7(10 + 5y) - 15,5$;
 - 3) $a(b - 4) + b(6 - a) - 2(3b - 2a)$;
 - 4) $7 - 1\frac{1}{2}m + 6\left(\frac{1}{3}m - 5\frac{1}{3}n\right) - 0,5(m - 64n)$.
- 146.** Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:
- 1) $9(5 - y) + 6(y - 3) - 3(4 - y)$;
 - 2) $m(n - 2,8) + n(4,2 - m) - 1,4(3n - 2m) - 6$.
- 147.** Запишіть у вигляді рівності твердження:
- 1) сума квадратів чисел a і b дорівнює квадрату суми цих чисел;
 - 2) квадрат різниці чисел a і b дорівнює різниці квадратів цих чисел;
 - 3) сума двох чисел, одне з яких менше від n на 2, а друге — більше за n на 2, дорівнює подвоєному числу n ;
 - 4) сума двох протилежних чисел дорівнює 0;
 - 5) сума потроєного і подвоєного числа a дорівнює добутку чисел a і 5;
 - 6) частка від ділення модулів двох протилежних чисел дорівнює 1.

Чи є ця рівність тотожністю? Відповідь обґрунтуйте.

148*. Доведіть, що $5a(3b - 2c) + 4b(2c - 3a) - 7c(-a + b) - bc = 15$, якщо $a(b - c) = 5$.

149*. Доведіть, що за будь-яких a і b значення виразу $5a + 5b - (4b - 2 - 0,5(2a - 5b - 3(2a - 3b + 2(a + b))))$ дорівнює 2.

150*. Який вираз треба підставити замість зірочки, щоб одержати тотожність:

- 1) $2(a + b) - 2 \cdot * = 0$;
- 2) $2(a + b) - 2 \cdot * = 4b$;
- 3) $2(a + b) - 2 \cdot * = 4a + 4b$;
- 4) $2(a + b) - 2 \cdot * = 2a + 6b$;
- 5) $2(a + b) - 2 \cdot * = 4a - 4b$;
- 6) $2(a + b) - 2 \cdot * = 4b - 2a$?

151*. Доведіть, що:

- 1) середнє арифметичне трьох послідовних натуральних чисел дорівнює середньому із цих чисел;
- 2) $(10a + b) \cdot 11 = 100a + 10(a + b) + b$. Поясніть, як можна швидко помножити двоцифрове число на 11.

Проявіть компетентність



- 152.** Стовбуром дерева з ґрунту до його крони піднімається вода, яка під дією сонячних променів випаровується через листя. Якщо вирубувати дерева, то ця вода накопичуватиметься в ґрунті, що призведе до утворення болота. Доросла береза за добу випаровує близько 75 л води, бук — 100 л, а липа — 200 л. Скільки відер води щодня випаровує кожне із цих дерев, якщо одне відро вміщує 5 л? Обчисліть, скільки берез потрібно посадити на ділянці, щоб за день випаровувалося 1500 л води, якщо на цій ділянці вже ростуть 3 буки і 3 липи.



153. Клієнт поклав у банк n грн на депозит із накопиченням (капіталізацією) відсотків, за умовами якого суму річних відсотків додають до суми основного вкладу. Якою буде сума на його рахунку через 2 роки, якщо банк нараховує 7 % річних? Складіть вираз для розв'язування задачі.



154. Населення міста становить на сьогодні m тис. жителів і збільшується щороку на 3 % порівняно з попереднім роком. Яким стане населення міста через: 1) 3 роки; 2) 5 років? Складіть вираз для розв'язування задачі.

§ 5. СТЕПІНЬ 3 НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

1. Що таке степінь з натуральним показником?

Ситуація. Ірині треба записати вираз для знаходження площі квадрата зі стороною a , а Андрієві — об'єму куба з ребром a .



qr.orioncentr.com.ua/49mpA

Свої дії вони записали так:

Ірина

Ширина: a

Довжина: a

Площа: $a \cdot a = a^2$

Андрій

Ширина: a

Довжина: a

Висота: a

Об'єм: $a \cdot a \cdot a = a^3$



Чи правильно діяли Ірина й Андрій?

Так.



Вирази a^2 і a^3 називають відповідно *квадратом числа a* і *кубом числа a* .

Добуток n рівних множників, кожний з яких дорівнює a , можна записати за допомогою *степеня*:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множників}} = a^n.$$

n множників

Степінь	Основа	Що показує	Показник	Що показує
a^n	a	яке число множать саме на себе	n	скільки рівних множників є в добутку
2^5	2	число 2 множать саме на себе	5	5 рівних множників є в добутку

Оскільки для лічби використовують натуральні числа, то виразу a^n дали назву «*ступінь з натуральним показником*». Пізніше ви дізнаєтесь про степені з іншими показниками.

Запам'ятайте!

Степенем числа a з натуральним показником n називається добуток n множників, кожний із яких дорівнює a .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множників}}$$



Вираз a^n читають так: « a в степені n » або « n ний ступінь числа a ».



Тут і далі n — натуральне число.

Задача 1

Запишіть вираз $27 \cdot 3 \cdot 9$ у вигляді степеня з основою:

- 1) 3; 2) 9; 3) 27.

Розв'язання

- 1) $27 \cdot 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$;
- 2) $27 \cdot 3 \cdot 9 = 9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$;
- 3) $27 \cdot 3 \cdot 9 = 27 \cdot 27 = 27^2$.

Простіші властивості степенів

Якщо:	то:
показник степеня дорівнює 1	$a^1 = a$
основа степеня дорівнює 1	$1^n = 1$
основа степеня дорівнює 0	$0^n = 0$
$a^n = 0$	$a = 0$

- Задача 2** Розв'яжіть рівняння: 1) $(x + 5)^2 = 0$;
2) $(2x + 7)^5(x - 9)^4 = 0$.

Розв'язання

- 1) $(x + 5)^2 = 0$, звідси $x + 5 = 0$ і $x = -5$.
- 2) $(2x + 7)^5(x - 9)^4 = 0$, звідси:
 $(2x + 7)^5 = 0$, або $(x - 9)^4 = 0$,
 $2x + 7 = 0$, $x - 9 = 0$,
 $x = -3,5$; $x = 9$.

2. Порівняння степенів

Як можна порівняти значення степенів?

Обчисливши ці значення.



- Задача 3** Чи є рівними значення степенів:

1) 5^4 і $(-5)^4$; 2) 5^3 і $(-5)^3$?

Розв'язання

Обчислимо значення даних виразів:

- 1) $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$,
 $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$.

Отже, $5^4 = (-5)^4$.

2) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$.

Отже, $5^3 \neq (-5)^3$.



Чи завжди треба знаходити значення степенів, щоб їх порівняти?

Ні.



Наприклад, значення 5^3 є **додатним** числом, а значення $(-5)^3$ є **від'ємним** числом, тому:

$$5^3 > (-5)^3.$$



Знак степеня залежить від знака основи степеня та від **парності чи **непарності** показника степеня.**

Знак основи	Показник степеня	Знак степеня
+	будь-який	+
-	парний	+
-	непарний	-

3. Порядок виконання дій у виразах зі степенями

Дію, за допомогою якої добуток рівних множників згортають у степінь, називають *піднесенням до степеня*. Це — дія *третього ступеня*. Під час обчислення значень виразів її виконують найпершою.

qr.orioncentr.com.ua/1YyO



Задача 4 Обчисліть значення виразу $5x^2 + 10$, якщо $x = -3$.

Розв'язання

Запишемо вираз і значення змінної:

$$5x^2 + 10, \text{ якщо } x = -3.$$

Підставимо значення змінної:

$$5 \cdot (-3)^2 + 10 =$$

Виконаємо піднесення до степеня: $= 5 \cdot 9 + 10 =$

Обчислимо значення виразу: $= 55.$



У виразах, що містять степені, спочатку виконують піднесення до степеня, потім — множення або ділення, а останніми — додавання або віднімання. Тут і далі буквені показники є натуральними числами.

Дізнайтеся більше

1. Уперше степені з натуральними показниками чисел охарактеризував **Діофант Александрійський** — давньогрецький математик, який жив у III ст.

2. **Дубинчук Олена Степанівна** (1919–1994) — одна з визначних педагогинь-математики України. Народилася на Вінниччині, у м. Ямполі, закінчила механіко-математичний факультет Київського державного університету ім. Тараса Шевченка. Авторка численних підручників, методик і технологій навчання математики. Її педагогічне кредо — навчання має бути доступним і цікавим для учнів, ураховувати їхні інтереси, потреби та запити. qr.orioncentr.com.ua/PoHai



Словничок

qr.orioncentr.com.ua/3DVVD

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
ступінь числа	power of a number	Potenz einer Zahl	puissance d'un nombre

Пригадайте головне

1. Що таке ступінь числа; основа степеня; показник степеня?
2. Що означає піднести число a до степеня n ?
3. Чому дорівнює a в степені 1?
4. Чому дорівнює 1 в степені n ?
5. Чому дорівнює 0 в степені n ?
6. Який знак парного степеня додатного числа; від'ємного числа?
7. Який знак непарного степеня додатного числа; від'ємного числа?
8. Який порядок виконання дій у виразі, що містить степені?

Усне тренування

1. Обчисліть :

1) 10 % числа 60; 2) 50 % числа 90; 3) 300 % числа 50.

2. Знайдіть число, якщо:

1) 10 % цього числа дорівнюють 60;

2) 20 % цього числа дорівнюють 60;

3) 200 % цього числа дорівнюють 60.

Розв'яжіть задачі155'. Прочитайте вираз: 1) 2^2 ; 2) $(-10)^5$; 3) 7^8 ; 4) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$;5) $(-5)^{10}$; 6) 0^2 . Назвіть основу і показник степеня.

Що вони показують?

156'. Скільки разів взято множником число 5, якщо отримали степінь:

1) 5^2 ; 2) 5^5 ; 3) 5^n ; 4) 5^m ?

157'. Якими даними треба доповнити порожні клітинки таблиці 8?

Таблиця 8

Степінь	2^2		7^8		$(-5)^3$		4^4	
Основа степеня		-5		0		0,9		1
Показник степеня		6		3		10		21

158'. Запишіть у вигляді степеня:

1) $2 \cdot 2 \cdot 2$;2) $-7 \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$;3) $-1,5 \cdot (-1,5) \cdot (-1,5) \cdot (-1,5)$;4) $-n \cdot (-n) \cdot (-n) \cdot (-n) \cdot (-n) \cdot (-n) \cdot (-n) \cdot (-n) \cdot (-n)$;5) $2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a$;6) $(3-x) \cdot (3-x) \cdot (3-x) \cdot (3-x)$.

159'. Запишіть у вигляді добутку:

1) $(-15)^5$; 3) $(-4)^6$;2) 10^4 ; 4) a^7 .

160°. Обчисліть:

- | | |
|---------------|------------------|
| 1) 2^6 ; | 6) 3^3 ; |
| 2) $(-2)^6$; | 7) $0,5^2$; |
| 3) $(-4)^3$; | 8) $(-0,5)^2$; |
| 4) 4^3 ; | 9) $0,1^6$; |
| 5) $(-3)^3$; | 10) $(-0,1)^6$. |

qr.orioncentr.com.ua/5fAez**161°.** Обчисліть:

- | | | |
|---------------|----------------|-----------------|
| 1) 6^2 ; | 3) $(-25)^1$; | 5) $(-0,5)^3$; |
| 2) $(-6)^2$; | 4) 25^1 ; | 6) $0,5^3$. |

162°. Знайдіть a^2 , якщо a дорівнює:

- | | |
|---------|--------------------|
| 1) 10; | 3) 1,1; |
| 2) 0,1; | 4) $\frac{1}{5}$. |

163°. Знайдіть m^3 , якщо m дорівнює: 1) 10; 2) 0,1; 3) $\frac{1}{2}$.**164°.** Обчисліть: 1) 10^1 ; 2) 25^1 ; 3) 1^9 ; 4) 1^{100} ; 5) 0^6 ; 6) 0^{15} .**165°.** Обчисліть: 1) 5^1 ; 2) 1^5 ; 3) 0^{90} .**166°.** Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|----------------------|---------------------------|
| 1) $x^5 = 0$; | 4) $(8 - x)^9 = 0$; |
| 2) $(x + 1)^3 = 0$; | 5) $(6 + x)^{25} = 0$; |
| 3) $(2 - x)^2 = 0$; | 6) $(x + 20)^{111} = 0$. |

167°. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| 1) $x^8 = 0$; | 3) $(9 - x)^2 = 0$; |
| 2) $(15 + x)^{13} = 0$; | 4) $(x + 8)^{17} = 0$. |

168°. Додатним чи від'ємним є значення степеня:

- | | |
|---------------|-----------------|
| 1) $(-8)^8$; | 3) $(-3,6)^5$; |
| 2) 10^7 ; | 4) $(-1)^9$? |

169°. Додатним чи від'ємним є значення степеня:

- | | | |
|---------------|------------|---------------|
| 1) $(-4)^8$; | 2) 4^7 ; | 3) $(-4)^5$? |
|---------------|------------|---------------|

170°. Поставте знак $<$, $>$, $=$ між виразами:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) 12^3 і 0; | 4) 0 і $(-1)^6$; |
| 2) 4^6 і 0; | 5) $(-2)^5$ і 2^5 ; |
| 3) $(-7)^5$ і 0^3 ; | 6) $(-2)^6$ і 2^6 ; |

- 7) -2^6 і 2^6 ;
 8) -2^6 і $(-2)^6$;
 9) $(-2)^5$ і $(-5)^2$;
 10) 2^5 і 5^2 ;
 11) 80 і 3^4 ;
 12) $0,2^2$ і $-0,2$.



qr.orioncentr.com.ua/na2N7

171°. Порівняйте значення виразів:

- 1) $(-1)^4$ і 1^4 ; 4) 1^7 і 1^9 ;
 2) $(-1)^3$ і 1^3 ; 5) 1^{23} і $(-1)^{32}$;
 3) $(-1)^5$ і $(-1)^6$; 6) $(-1)^3$ і $(-1)^5$.

172°. Порівняйте значення виразів:

- 1) $(-4)^4$ і 4^4 ; 3) $(-4)^5$ і 4^2 ;
 2) $(-4)^3$ і 4^3 ; 4) $(-4)^6$ і 4^6 .

173°. Знайдіть:

- 1) суму квадратів чисел 5 , -2 і -4 ;
 2) різницю кубів чисел -10 і 5 ;
 3) суму квадрата числа 6 і куба числа -3 .

174°. Знайдіть:

- 1) суму квадратів чисел -1 , 6 і -3 ;
 2) квадрат суми чисел -1 , 6 і -3 .

175°. Обчисліть:

- 1) $(2 + 3^2) : 0,1^2$; 5) $4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 9^2$;
 2) $11 \cdot (-1)^4$; 6) $(-3)^4 - 3^4 + 10^3 \cdot 0^6$;
 3) $0^8 - 4 : \left(\frac{1}{2}\right)^4$; 7) $\left(1\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}\right)^1 : \left(1\frac{1}{3}\right)^2$;
 4) $(-6)^3 + (-6^2) \cdot 3$; 8) $(-6^3 + 6^2) \cdot 3$.

176°. Обчисліть:

- 1) $2 + 10^3 + 5 \cdot 2^4$; 4) $(-12 + 8^2) : (-2)$;
 2) $-16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2^4$; 5) $(-12 + (-8))^2 \cdot 5$;
 3) $((-5)^3 + 5^2) : 10$; 6) $(-2)^5 + 2^5 + 1^3 \cdot 3^1$.

177°. Розв'яжіть рівняння:

1) $2 \cdot 3^2 - x = 25$; 2) $4x = 8^2$; 3) $3^4 + x = (-9)^2$.

178. Запишіть у вигляді степеня з основою 2:

1) $8 \cdot 4$; 2) $2 \cdot 4 \cdot 16$; 3) $32 \cdot 2 \cdot 64$.

179. Запишіть у вигляді степеня з основою 5:

1) $25 \cdot 5$;
2) $5 \cdot 25 \cdot 125$;
3) $25 \cdot 25 \cdot 125 \cdot 125 \cdot 125 \cdot 25$.

180. Запишіть вираз $4 \cdot 64 \cdot 16$ у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) 4; 3) 16.

181. Запишіть вираз $2 \cdot 8 \cdot 16$ у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) 4; 3) 16.

182. Знайдіть a^4 , якщо a дорівнює:

1) -2 ; 2) $-0,3$; 3) $1\frac{1}{2}$.

183. Знайдіть m^5 , якщо m дорівнює:

1) 3; 2) $-0,2$; 3) $-1\frac{2}{3}$.

184. Чи може a^2 бути меншим ніж a ? Наведіть приклад.

185. За якого натурального значення n виконується нерівність:

1) $(-6)^2 < 3^n < \left(\frac{1}{0,1}\right)^2$; 2) $0^3 \leq 0,5^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3$?

186. Число 9065 можна записати як суму розрядних доданків:

$9065 = 9 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5$. Запишіть у такому вигляді число:

1) 8536; 2) 22 000.

187. Запишіть у вигляді степеня вираз:

1) $0,125 \cdot \frac{1}{8} \cdot 4 \cdot 0,25$;

2) $0,09 \cdot 0,09 \cdot 0,09 \cdot (-0,3) \cdot (-0,3) \cdot (-0,3)$;

$$3) 4 \cdot 27 \cdot 9 \cdot 64 \cdot 3 \cdot 16;$$

$$4) -\frac{2}{5} \cdot (-0,4) \cdot (-0,064) \cdot \frac{4}{25}.$$

188. Запишіть у вигляді степеня вираз:

$$1) 3 \cdot (-125) \cdot 4 \cdot 9 \cdot (-2);$$

$$2) 8 \cdot 25 \cdot 125 \cdot 16 \cdot 125 \cdot 2.$$

189*. Знайдіть значення виразу

$$(a^2 - 1) \cdot (a^2 - 2) \cdot (a^2 - 3) \cdot \dots \cdot (a^2 - 100),$$

якщо: 1) $a = 8$; 2) $a = -6$.

190*. Доведіть:

$$1) 11^{10} - 1 \text{ ділиться на } 10;$$

$$2) 10^{10} + 5 \text{ ділиться на } 3;$$

$$3) 41^5 - 1 \text{ ділиться на } 10;$$

$$4) 10^5 + 17 \text{ ділиться на } 9.$$

191*. Доведіть, що вираз $\frac{10^n + 8}{9}$ є натуральним числом для будь-якого натурального n .

Проявіть компетентність

192. Підлоги трьох кімнат мають форму квадратів. Сторони перших двох відповідно дорівнюють 3 м і 4 м. Знайдіть розміри підлоги третьої кімнати, якщо її площа дорівнює сумі площ підлог двох інших кімнат.



193. Дванадцяткова система числення була створена ще стародавніми шумерами (5 тис. р. до н. е.). Елементом такої системи нині може служити лічба дюжинами. Перший, другий і третій степені числа 12 мають власні назви: 1 дюжина = 12 штук, 1 gros = 12 дюжин, 1 маса = 12 grosів. Скільки штук: 1) в 1 масі; 2) в 1 grosі?

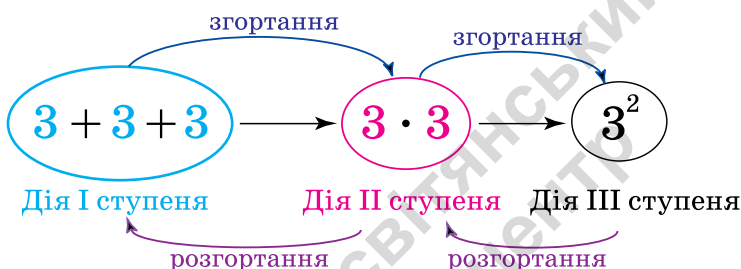
§ 6. ДІЇ ЗІ СТЕПЕНЯМИ

1. Зв'язок між діями різних ступенів

Ситуація. Дарина Олегівна дала учням завдання показати зв'язок між діями першого, другого і третього ступенів. Група учнів виконала це завдання так, як показано на малюнку 6.



qr.orioncentr.com.ua/eoTgt



Мал. 6



Чи правильні висновки зробила група учнів?



Так.

Під час дій зі степенями розрізняють два випадки, коли компоненти дії мають:

а) рівні основи; б) різні основи. Розглянемо їх окремо.

2. Дії зі степенями з рівними основами



Які дії можна виконувати зі степенями з рівними основами?



Дії всіх трьох ступенів.

Наприклад:

$$\begin{aligned} 3^3 + 3^2 &= 27 + 9 = 36, & 3^3 - 3^2 &= 27 - 9 = 18, \\ 3^3 \cdot 3^2 &= 27 \cdot 9 = 243, & 3^3 : 3^2 &= 27 : 9 = 3, \\ (3^3)^2 &= 27^2 = 729. \end{aligned}$$

Проте такі обчислення не завжди легко виконувати. Під час обчислень спираються на властивості степенів.

Запам'ятайте!**Основна властивість степенів**

Добуток двох степенів з рівними основами дорівнює степеню з тією самою основою і показником, що дорівнює сумі показників множників:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Справді, спираючись на означення степеня, спочатку розгорнемо кожний степінь у добуток, а потім згорнемо отриманий результат у степінь:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n+m} = a^{n+m}.$$

n множників m множників $n + m$ множників

Отже, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.



Щоб помножити кілька степенів з однією основою, треба застосувати основну властивість степенів.

Наприклад, $a^n \cdot a^m \cdot a^k = (a^n \cdot a^m) \cdot a^k = a^{n+m} \cdot a^k = a^{n+m+k}$.

Запам'ятайте!**Властивість частки степенів з рівними основами**

Частка двох степенів з рівними основами, відмінними від нуля, дорівнює степеню з тією самою основою і показником, що дорівнює різниці показників діленого й дільника:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} (n > m).$$

Доведіть цю властивість самостійно.



Чому на показники степенів накладено обмеження $n > m$?

Тому, що при $n \leq m$ у частці одержимо степінь, показник якого не є натуральним числом.





Дії другого ступеня **зі степенями**, що мають рівні основи, зводяться до відповідних дій першого ступеня **з їхніми показниками**:

множення степенів — до **додавання їх показників**;
ділення степенів — до **віднімання їх показників**.

3. Дія третього ступеня зі степенями

qr.orioncentr.com.ua/P3Gys



Яка дія зі степенями є дією третього ступеня?

Піднесення степеня до степеня.



Запам'ятайте!

Властивість піднесення степеня до степеня

Для степеня з показником m його n -й степінь дорівнює степеню з тією самою основою і показником mn :

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Справді, за означенням та основною властивістю степеня отримаємо:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ множників}} = \overbrace{a^{m+m+\dots+m}}^{n \text{ доданків}} = a^{mn}.$$

Отже, $(a^m)^n = a^{mn}$.

Наприклад, $(2^4)^3 = 2^{12}$.



У виразі $(a^m)^n$ показники m і n називатимемо відповідно внутрішнім і зовнішнім показниками.



Дія третього ступеня **зі степенем** зводиться до відповідної дії другого ступеня **із внутрішнім і зовнішнім показниками**:

піднесення степеня до степеня — до **множення двох показників**.

4. Дії зі степенями з різними основами


qr.orioncentr.com.ua/TNDIB

Запам'ятайте!

Властивості множення степенів з різними основами

Добуток n -х степенів
чисел a і b дорівнює
 n -му степеню
добутку ab :
 $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

n -й степінь добутку
чисел a і b дорівнює
добутку їх n -х
степенів:
 $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

Запам'ятайте!

Властивості ділення степенів з різними основами

Частка n -х степенів
чисел a і b при $b \neq 0$
дорівнює n -му
степеню частки $\frac{a}{b}$:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

n -й степінь частки
чисел a і b , якщо $b \neq 0$,
дорівнює частці
їх n -х степенів:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

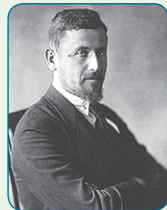


Наведені властивості дій множення і ділення є взаємно оберненими в кожній парі.

Дізнайтеся більше

Кравчук Михайло Пилипович (1892–1942) — український математик, доктор фізико-математичних наук, професор Київського політехнічного інституту. Народився в селі Човниця на Волині.

Методи М. П. Кравчука були використані для створення першого у світі комп'ютера. М. П. Кравчук був співавтором першого тритомного словника української математичної термінології.


qr.orioncentr.com.ua/b63LP

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/Tjmnd

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
показник степеня	exponent of power	Exponent einer Potenz	exposant

Пригадайте головне

1. Які дії можна виконувати зі степенями?
2. Які закони справджуються для дій зі степенями першого ступеня? Другого ступеня?
3. Яка основна властивість степенів? Доведіть її.
4. Сформулюйте властивість частки степенів з рівними основами.
5. Яка властивість піднесення степеня до степеня? Доведіть її.
6. Сформулюйте властивість частки степенів з різними основами і рівними показниками.

Усне тренування

1. Знайдіть квадрат числа a , якщо:
 - 1) $a = 7$; 2) $a = 0,7$; 3) $a = 0,07$; 4) $a = 70$.
2. Обчисліть:
 - 1) $(-7)^2$; 2) $(-0,7)^2$; 3) $(-0,07)^2$; 4) $(-70)^2$.
3. Знайдіть куб числа a , якщо:
 - 1) $a = 2$; 2) $a = 0,2$; 3) $a = -0,2$; 4) $a = -20$.
4. Обчисліть:
 - 1) $(3)^3$; 2) $(0,3)^3$; 3) $(-0,3)^3$; 4) $(-30)^3$.

Розв'яжіть задачі

- 194'. Яка з рівностей є правильною:
 - 1) $5^2 + 5^3 = 5^5$; 3) $5^2 \cdot 5^3 = 5^5$;
 - 2) $5^2 \cdot 5^3 = 25^5$; 4) $5^2 \cdot 5^3 = 5^6$?
- 195'. Яка з рівностей є правильною:
 - 1) $6^8 : 6^2 = 1^4$; 2) $6^8 : 6^2 = 6^6$; 3) $6^8 : 6^2 = 6^4$?
- 196'. Яка з рівностей є правильною:
 - 1) $(11^3)^7 = 11^{10}$; 2) $(11^3)^7 = 11^{21}$; 3) $(11^3)^7 = 33^7$?

197'. Чи є правильною рівність:

- 1) $(12 + 5)^3 = 12^3 + 5^3$; 3) $(12 \cdot 5)^3 = 12^3 + 5^3$;
 2) $(12 + 5)^3 = 12^3 \cdot 5^3$; 4) $(12 \cdot 5)^3 = 12^3 \cdot 5^3$?

198°. Запишіть у вигляді степеня з основою 2:

- 1) $2^8 \cdot 2^3$; 3) $2 \cdot 2^{13} \cdot 2^{16}$;
 2) $2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^{10}$; 4) $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^8 \cdot 2^{10}$.

199°. Запишіть у вигляді степеня з основою 8:

- 1) $8^5 \cdot 8$; 2) $8^{16} \cdot 8^9 \cdot 8^{20}$; 3) $8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^4$.

200°. Запишіть у вигляді степеня добуток:



- 1) $10^7 \cdot 10^5$;
 2) $0,3 \cdot 0,3^2$;
 3) $4,5^{33} \cdot 4,5^4 \cdot 4,5$;
 4) $2,1^4 \cdot 2,1^3 \cdot 2,1$;
 5) $a \cdot a^5 \cdot a^{36} \cdot a^4 \cdot a^8$;
 6) $n^4 \cdot n^4 \cdot n^4$;
 7) $-4 \cdot (-4)^9$.



qr.orioncentr.com.ua/fzg29

201°. Запишіть у вигляді степеня добуток:

- 1) $5^4 \cdot 5^3 \cdot 5^6$; 4) $m^4 \cdot m^7 \cdot m^{12}$;
 2) $0,01 \cdot 0,01^9$; 5) $(-x)^2 \cdot (-x)^{15} \cdot (-x)^{23}$;
 3) $c \cdot c^8$; 6) $\frac{a}{c} \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^6 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^4 \quad (c \neq 0)$.

202°. Запишіть у вигляді добутку степенів:

- 1) 5^{3+4} ; 3) 8^{m+n} ; 5) m^{2x+1} ;
 2) 10^{4+x} ; 4) x^{3+a} ; 6) a^{m+n+1} .

203°. Запишіть у вигляді добутку степенів:

- 1) 2^{1+7} ; 2) 2^{6+x} ; 3) 2^{m+n} .

204°. Подайте степінь a^{60} у вигляді добутку двох степенів, один з яких:

- 1) a^3 ; 3) a^{30} ;
 2) a^5 ; 4) a^{59} .

205°. Подайте степінь m^{25} у вигляді добутку двох степенів, один з яких:

- 1) m^2 ; 2) m^5 ; 3) m^{15} .

206°. Запишіть у вигляді степеня з основою 10:

- 1) $10^8 : 10$; 4) $10^{34} : 10^{15}$;
 2) $10^{10} : 10$; 5) $10^{20} : 10^6 : 10$;
 3) $10^{15} : 10^{13}$; 6) $10^{12} : 10^9 : 10^2$.

207°. Запишіть у вигляді степеня з основою 11:

- 1) $11^{14} : 11^4$; 2) $11^{10} : 11^6$; 3) $11^{25} : 11^{13}$.

208°. Запишіть у вигляді степеня частку:

- 1) $\frac{5^9}{5^7}$; 2) $2^{14} : 2^{10}$; 3) $\frac{(-4,6)^{22}}{(-4,6)^{20}}$; 4) $(-7)^{23} : (-7)^8$.

209°. Запишіть у вигляді степеня частку:

- 1) $\frac{7^{19}}{7^3}$; 2) $\frac{0,9^{24}}{0,9^4}$; 3) $4^{16} : 4^9$; 4) $\frac{(-c)^{51}}{(-c)^{49}} (c \neq 0)$.

210°. Запишіть у вигляді частки степенів ($n \geq 6$):

- 1) 2^{9-4} ; 4) 20^{n-4} ; 7) m^{n-6} ;
 2) 9^{13-5} ; 5) $0,9^{n-3}$; 8) 5^{n-6} ;
 3) 10^{n-1} ; 6) 7^{2n-4} ; 9) a^{4n-6} .

211°. Запишіть у вигляді частки степенів ($n \geq 5$):

- 1) 7^{5-1} ; 2) 7^{n-3} ; 3) 10^{n-5} .

212°. Запишіть у вигляді степеня з основою 0,1:

- 1) $0,1^9 \cdot 0,1^{15} : 0,1^6$; 2) $\frac{0,1^{10} \cdot 0,1^3}{0,1^5}$; 3) $\frac{0,1^{100} \cdot 0,1^{200}}{0,1^{80} \cdot 0,1^{170}}$.

213°. Запишіть у вигляді степеня з основою 5:

- 1) $5^6 \cdot 5^9 : 5^3$; 2) $\frac{5^7 \cdot 5^4}{5^9}$; 3) $\frac{5^{25} \cdot 5^{25}}{5^{12} \cdot 5^8}$.

214°. Запишіть у вигляді степеня:



- 1) $(3^5)^{10}$; 6) $(a^3)^2$;
 2) $(4^{11})^9$; 7) $(a^x)^{10}$;
 3) $(20^4)^4$; 8) $(m^{10x})^x$;
 4) $((-1)^3)^{13}$; 9) $(c^m)^n$.
 5) $((-3)^{10})^4$;



qr.orioncentr.com.ua/ZgQAH

215°. Запишіть у вигляді степеня:

- 1) $(2^2)^5$; 2) $((-10)^4)^3$; 3) $(4^x)^3$; 4) $(x^m)^p$.

216°. Знайдіть a^{12} , якщо a^4 дорівнює: 1) 5; 2) 0,2; 3) 0,01.

217°. Знайдіть a^6 , якщо a^3 дорівнює: 1) 10; 2) -2; 3) -0,3.

218°. Знайдіть x :

1) $(18)^{24} = (18^x)^8$;

3) $(2,3)^{24} = (2,3^2)^x$;

2) $(99)^{24} = (99^x)^6$;

4) $(5,09)^{24} = (5,09^x)^{24}$.

219°. Поставте знак $<$, $>$, $=$ між виразами:

1) $((-2)^5)^3$ і $((-2)^5)^2$;

3) $(-7)^5$ і $(0^2)^2$;

2) $((-2)^5)^2$ і $((-2)^2)^5$;

4) $((-1)^5)^2$ і $(-1)^{32}$.

220°. Поставте знак $<$, $>$, $=$ між виразами:

1) $((-6)^9)^5$ і $((-6)^8)^2$; 2) $(-0,7)^7$ і $(0^8)^5$; 3) $((-1)^3)^3$ і 1^{16} .

221°. Запишіть у вигляді степеня:



1) $2^5 \cdot 6^5$;

6) $12^8 : 6^8$;

2) $3^7 \cdot 4^7$;

7) $6^7 : 3^7$;

3) $2^4 \cdot 3^4$;

8) $64^4 : 8^4$;

4) $6^9 \cdot 5^9$;

9) $27^3 : 9^3$;

5) $3^3 \cdot 5^3 \cdot 4^3$; 10) $\frac{14^{11}}{7^{11}}$.



qr.orioncentr.com.ua/rivE0

222°. Запишіть у вигляді степеня:

1) $3^{21} \cdot 10^{21}$; 2) $2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^6$; 3) $15^{10} : 5^{10}$; 4) $42^5 : 14^5$.

223°. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $9a^2b^2$;

3) $0,25a^2b^4$;

5) $0,25(a+3)^2$;

2) $8a^3b^3$;

4) $(a+3)^5a^5$;

6) $(a+3)^4(a+2)^4$.

224°. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $4m^2p^2$; 2) $27x^3y^6$; 3) $(m+3)^4(n+2)^4$.

225°. Подайте степінь як добуток степенів:

1) $(5ab)^6$;

4) $(-0,7abc^4)^5$;

2) $(-ab^4)^2$;

5) $\left(-\frac{1}{3}x^6y\right)^3$;

3) $(4a^3b^4)^2$;

6) $\left(1\frac{1}{2}m^5p^4\right)^2$.

226°. Подайте степінь як добуток степенів:

1) $(2ab)^8$; 2) $(-a^5b)^8$; 3) $\left(3\frac{1}{2}m^5p^4\right)^2$.

227°. Подайте у вигляді квадрата вираз:

- 1) $9a^2$; 4) $400a^{40}b^{100}$;
 2) $36a^2b^2$; 5) $0,04a^8b^6c^{10}$;
 3) $81a^{12}b^{12}$; 6) $\frac{1}{4}a^2b^{18}c^2$.

228°. Подайте у вигляді куба вираз:

- 1) $27a^{12}b^{36}$; 2) $-27a^{12}b^{36}$; 3) $-27a^9b^{15}$.

229°. Обчисліть:

- 1) $(6 \cdot 0,3)^3 : 6^3$; 4) $\frac{24^6}{6^6 \cdot 2^6}$;
 2) $(12 \cdot 5)^2 : 5^2$; 5) $\frac{36^4}{3^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4}$;
 3) $\frac{18^{19}}{9^{19} \cdot 2^{19}}$; 6) $\frac{3^3 \cdot 7^3 \cdot 4^3}{84^3}$.

230°. Обчисліть:

- 1) $(5 \cdot 8)^4 : (8)^4$; 2) $(2 \cdot 0,25)^4 : 0,25^4$; 3) $\frac{64^{42}}{32^{42} \cdot 2^{42}}$.

231°. Знайдіть *, якщо:



- 1) $15^3 = * \cdot 5^3$;
 2) $20^3 = 2^3 \cdot *$;
 3) $66^{10} = * \cdot 11^{10} \cdot 3^{10}$;
 4) $24^5 = 2^5 \cdot (*)^5$;
 5) $36^7 = 6^7 \cdot (*)^7$;
 6) $36^2 = 2^2 \cdot (*)^2 \cdot 9^2$;
 7) $36 \cdot a^4 \cdot m^2 = (*)^2$;
 8) $25 \cdot m^6 \cdot 16 \cdot c^{12} = (*)^2$;
 9) $0,01 \cdot c^{100} = (*)^2$;
 10) $125 : c^3 = (*)^3$ ($c \neq 0$).



qr.orioncentr.com.ua/4T7WH

232°. Знайдіть *, якщо:

- 1) $100^{11} = 2^{11} \cdot (*)^{11}$; 3) $100^{34} = 2^{34} \cdot (*)^{34} \cdot 5^{34}$.
 2) $100^8 = 25^8 \cdot (*)^8$;

233°. Запишіть у вигляді степеня з основою 3:

- 1) $(3^3)^5 \cdot 3^2 : 3^{12}$; 2) $\frac{(3^{10})^4 \cdot 3^7}{(3^{15})^2}$; 3) $\frac{3^{18} \cdot (3^4)^5}{3^{21} \cdot 3^{13}}$.

234°. Запишіть у вигляді степеня з основою 8:

$$1) (8^{11})^8 : (8^7)^{10}; \quad 2) \frac{(8^9)^5 : 8^{10}}{(8^7)^3} \cdot 8^4; \quad 3) \frac{8 \cdot 8^5 \cdot (8^2)^3}{8^{14} : (8^5)^2}.$$

235°. Обчисліть:

$$1) (2^3)^4 : (2^3)^2 : 2^2; \quad 3) (5^{10})^9 \cdot (5^9)^{10} : 5^{179};$$

$$2) ((-3)^6)^5 : (3^4)^7 - 3^2; \quad 4) (5^4)^{10} : 5^{39} \cdot 5^2.$$

236°. Обчисліть:

$$1) (4^6)^4 : (4^3)^8 + 4^2; \quad 2) ((-7)^2)^7 : (7^5)^2 : (-7)^3.$$

237°. Запишіть у вигляді степеня вираз ($x \neq 0, x \neq -2$):

$$1) ((x+2)^3)^7 \cdot (x+2); \quad 3) (3x)^8 : (3x)^4 : 9x^2;$$

$$2) (x+2)^8 : (x+2) \cdot (x+2)^3; \quad 4) (4x)^{15} : 64x^3 \cdot 16x^2.$$

238. Скільки дільників у числа, якому дорівнює вираз:

$$1) 3^2 \cdot 3^3; \quad 2) 7 \cdot 7^7?$$

239. Знайдіть x , якщо $a \neq 0, b \neq 0, x \neq 0$ і:

$$1) a^{12}b^{36} = a^2b^{10} \cdot x; \quad 3) a^{12}b^{36} = a^{22}b^{36} : x;$$

$$2) a^{12}b^{36} = a^4b^6 \cdot x; \quad 4) a^{12}b^{36} = a^{100}b^{100} : x.$$

240. Винесіть за дужки 3^n :

$$1) 3^n + 3^{n+6}; \quad 2) 3^n - 2 \cdot 3^{2+n}; \quad 3) 3^{n+5} + 3^{n+1}.$$

241. Винесіть за дужки 2^n :

$$1) 2^n + 2^{n+1}; \quad 2) 2^n - 5 \cdot 2^{n+6}; \quad 3) 2^{n+2} - 3 \cdot 2^{n+3}.$$

242. Подайте степінь 5^{12} у вигляді степеня з основою:

$$1) 5^2; \quad 2) 5^3; \quad 3) 5^4.$$

243. Подайте степінь 4^{42} у вигляді степеня з основою:

$$1) 16; \quad 2) 64; \quad 3) 4^6; \quad 4) 4^7.$$

244. Знайдіть m^{12} , якщо m^2 дорівнює: 1) 10; 2) 0,1; 3) $\frac{1}{2}$.

245. Знайдіть c^6 , якщо c^3 дорівнює: 1) -10; 2) 0,1; 3) $-\frac{1}{5}$.

246. Обчисліть:

$$1) \left(\left(1\frac{1}{3} \right)^2 \right)^2; \quad 2) \left(\left(1\frac{1}{2} \right)^4 \right)^2; \quad 3) \left(\left(2\frac{1}{2} \right)^2 \right)^3.$$

247. Запишіть у вигляді степеня:

1) $8^4 \cdot 4^3$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 0,25 \cdot \left(\frac{1}{64}\right)^5$; 3) $0,0081 \cdot 0,3 \cdot 0,09$.

248. Запишіть у вигляді степеня з основою -2 :

1) $-8 \cdot 4$; 2) $-2 \cdot 4 \cdot 16$; 3) $-32 \cdot (-2) \cdot 64$.

249. Запишіть у вигляді степеня з основою $0,5$:

1) $0,25 \cdot 0,125$; 2) $0,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$; 3) $0,00625 \cdot 2 \cdot 5$.

250. Порівняйте значення виразів:

1) 5^{30} і 3^{50} ; 3) $((-4)^3)^5$ і $((-4)^5)^7$;
2) -9^8 і $(-3)^3$; 4) 10^8 і 9^{12} .

251. Якою цифрою закінчується число:

1) 5^{45} ; 3) 6^{10} ;
2) 10^{23} ; 4) 111^{222} ?

252. Знайдіть значення виразу $a^2 \cdot b^2$, якщо:

1) $a = 27$, $b = -\frac{1}{54}$; 2) $a = -36$, $b = -1\frac{1}{9}$.

253. Знайдіть значення виразу $(a \cdot b)^3 : c^3$ ($c \neq 0$), якщо:

1) $a = 7$, $b = -6,5$, $c = 45,5$;

2) $a = \frac{5}{7}$, $b = 6\frac{3}{10}$, $c = -4,5$.

254. Запишіть вираз у вигляді степеня:

1) $8 \cdot 0,3^2 \cdot 8^5 \cdot 0,3^4$;

2) $5^{14} \cdot 0,01^8 \cdot 5^2 \cdot 0,01^8$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-20)^4 : 0,5^2 : 10^4$;

4) $\left(\frac{5}{13}\right)^{65} \cdot \left(2\frac{3}{5}\right)^{35}$.

255. Спростіть вираз ($a \neq 0$, $c \neq 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$):

1) $(a^8 c^4)^3 : (a^6 c^3)^2$;

6) $(abc^2)^9 : (a^3 c)^2$;

2) $(n^{11} m^2)^3 \cdot (nm^3)^2$;

7) $(n^{11} m^2 p)^5 \cdot (np)^2$;

3) $(a^5 : c^2)^3 \cdot (a : c^2)^2$;

8) $(4ac^2)^3 : (2ac)^2$;

4) $(n^7 m^8)^3 : (n^2 m^2)^2$;

9) $(9n^8 m^2)^3 : (81n^4 m^2)^3$;

5) $(a^{15} a^4)^3 \cdot (a^{10} a^3)^2$;

10) $(25a^4 b^3)^2 : (5a^3 b^2)^2$.

256. Спростіть вираз ($a \neq 0, c \neq 0, m \neq 0, n \neq 0$):

1) $(a^7 c^3)^5 : (a^8 c)^3$; 3) $(n p m^2)^{22} : (n^2 m^3)^9$;

2) $(a^{10} : c^3)^2 \cdot (c^2 : a^3)^5$; 4) $(5ac)^4 : (25a^2 c^2)^2$.

257. Обчисліть:

1) $\frac{15^7}{9^3 \cdot 5^8}$; 2) $\frac{42^6}{28^5 \cdot 9^3}$; 3) $\frac{10^4 \cdot 18^5}{36^4 \cdot 5^3}$; 4) $\frac{21^4 \cdot 40^3}{140^3 \cdot 15^4}$.

258. Обчисліть:

1) $\frac{18^5}{4^3 \cdot 9^4}$; 2) $\frac{3^4 \cdot 5^3 \cdot 8^2}{30^3}$.

259*. Винесіть за дужки a^n :

1) $2a^n + a^{4n+2}$; 2) $a^{2n}c + a^{n+10} + a^n$.

260*. Якою цифрою закінчується число:

1) 209^{209} ; 2) 2023^8 ; 3) 27^{82} ; 4) 44^{55} ?

261*. Порівняйте значення виразів:

1) 36^8 і $4^8 \cdot 3^7$; 4) $4^9 \cdot 6^{12}$ і $8^{11} \cdot 3^8$;

2) $6^{15} \cdot 2^{17}$ і $4^{14} \cdot 3^{16}$; 5) 28^{15} і 9^{18} ;

3) 15^{20} і $9^{19} \cdot 5^{21}$; 6) 11^{24} і 5^{36} .

262*. Обчисліть $\frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$.

Проявіть компетентність

263. Відстань від Землі до Сонця становить $150 \cdot 10^6$ км. За який час світло подолає цю відстань, якщо швидкість світла у вакуумі — $3 \cdot 10^8$ м/с?

264. Апогей — це найбільш можлива відстань від Землі до Місяця. Вона становить близько $4 \cdot 10^5$ км. За який час космічний апарат, що рухається зі швидкістю $2 \cdot 10^8$ м/год, подолає цю відстань?



ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 2**КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

1. Що називається числовим виразом? А значенням числового виразу?
2. У якому порядку треба виконувати дії в числовому виразі без дужок; з дужками?
3. Що називається виразом зі змінними та як обчислити його значення?
4. Що таке допустимі значення змінної для виразу зі змінними?
5. Які вирази називаються раціональними? Цілими?
6. Які вирази називаються тотожно рівними?
7. Що таке тотожне перетворення виразу? Для чого їх використовують?
8. Як зводять подібні доданки?
9. Які правила розкриття дужок?
10. Як виносять спільний множник за дужки?
11. Що таке тотожність?
12. Що означає довести тотожність? Які є способи доведення тотожності?
13. Що таке степінь числа? Основа степеня? Показник степеня?
14. Що означає піднести число a до натурального степеня n ?
15. Який порядок виконання дій у виразі, що містить степені?
16. Які дії зі степенями можна виконувати?
17. Яка основна властивість степенів?
18. Сформулюйте властивість частки степенів з рівними основами.
19. Сформулюйте властивість добутку (частки) степенів з різними основами й рівними показниками.
20. Яка властивість піднесення степеня до степеня?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1°. Спростіть вираз $4,5n + 12,4 - 2n - 1\frac{2}{9}n$.

А. $-1\frac{5}{9}n + 12,4$.

Б. $13\frac{17}{45}n$.

В. $12,4 - 1\frac{2}{9}n$.

Г. $1\frac{5}{9}n + 12,4$.

2°. Винесіть спільний множник за дужки:
 $0,4ab - 2ac + 3,6ad$.

А. $a(0,4b - 2ac + 3,6d)$.

Б. $2a(0,4b - c + 3,6d)$.

В. $2a(0,2b - c + 1,8d)$.

Г. $2a(0,2b - c + 3,6d)$.

3°. Порівняйте: -24^3 і $(-24)^3$.

А. $-24^3 > (-24)^3$.

В. $-24^3 = (-24)^3$.

Б. $-24^3 < (-24)^3$.

Г. Не можна визначити.

4. Знайдіть значення виразу $2\frac{1}{7}(14a + b) - (3b - 2,8a)$,

якщо $a = -0,5$ і $b = 2\frac{1}{3}$.

А. $-7,2$.

Б. $7,2$.

В. $-11,4$.

Г. $-18,4$.

5°. Спростіть вираз $\frac{(a^5 \cdot a)^3 \cdot 2a^6}{(a^{14} : a^8)^4}$.

А. 2.

Б. $2a^2$.

В. $2a^4$.

Г. 0.



Розділ 3. ОДНОЧЛЕНИ І МНОГОЧЛЕНИ

У розділі дізнаєтесь:

- який вираз називають одночленом; многочленом;
- які властивості дій з одночленами/многочленами;
- про формули скороченого множення;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці

§ 7. ОДНОЧЛЕН. ДІЇ З ОДНОЧЛЕНАМИ

1. Що таке одночлен?

Ситуація. У своїх лепбуках за темами «Коло і круг», «Прямокутник і квадрат» учні помітили одну особливість у виразах для обчислення периметра і площі квадрата зі стороною a (мал. 7, а), об'єму і площі повної поверхні куба з ребром a (мал. 7, б), довжини кола і площі круга з радіусом r (мал. 7, в).



qr.orioncentr.com.ua/iohJJ

$$\begin{aligned}P &= 4a \\ S &= a^2\end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned}V &= a^3 \\ S &= 6a^2\end{aligned}$$

б

$$\begin{aligned}C &= 2\pi r \\ S &= \pi r^2\end{aligned}$$

в

Мал. 7



Яка це особливість?

Усі ці вирази є цілими і містять лише дії множення й піднесення до степеня.



Запам'ятайте!

Цілий вираз, що є добутком чисел, змінних та їх натуральних степенів, називають *одночленом*.

Наприклад, $32a$, xy , $32axy$, x^2 — це одночлени.



Самі числа, змінні та їх степені з натуральними показниками також є одночленами.

Наприклад, 5 , -5 , a , x^2 , $-x^2$ — це одночлени. Їх називають найпростішими одночленами.



Чи є вираз $5 \cdot \frac{1}{x}$ одночленом?

Ні, бо цей вираз не є цілим.



2. Дії першого ступеня з одночленами



Як додати одночлени з однаковою буквеною частиною?

Їх додають як подібні доданки.



Коротко говоримо: *суму згорнули в одночлен*.

Задача 1

Чи можна згорнути в одночлен суму одночленів:

1) $25x^5y^2$ і $15x^5y^2$;

2) $25x^4y^2$ і $15x^5y^2$?

Розв'язання

1. Дані одночлени $25x^5y^2$ і $15x^5y^2$ мають ту саму буквену частину x^5y^2 , тому в сумі ці доданки можна звести:

$$25x^5y^2 + 15x^5y^2 = 40x^5y^2.$$

Отже, суму даних одночленів можна згорнути в одночлен.

2. Дані одночлени $25x^4y^2$ і $15x^5y^2$ мають різні буквені частини x^4y^2 і x^5y^2 , тому в сумі ці доданки не є подібними і їх не можна звести:

$$25x^4y^2 + 15x^5y^2.$$

Отже, дану суму не можна згорнути в одночлен.



Щоб подати у вигляді одночлена суму (різницю) одночленів:

- 1) з'ясуйте, чи є подібні доданки в даному виразі;
- 2) якщо всі доданки є подібними, то зведіть їх.



Якщо в сумі подібних доданків немає або не всі доданки є подібними, то даний вираз **не можна подати у вигляді одночлена**.

3. Дії другого ступеня з одночленами



Чи можна добуток одночленів згорнути в одночлен?

Так.



Задача 2 Знайдіть добуток одночленів $-0,2x^4y^6$ і $5axy^2$.

Розв'язання Запишемо добуток усіх найпростіших одночленів, що входять до кожного з даних одночленів:

$$\begin{aligned} & -0,2x^4y^6 \cdot 5axy^2 = \\ & = -0,2 \cdot x^4 \cdot y^6 \cdot 5 \cdot a \cdot x \cdot y^2. \end{aligned}$$

Застосувавши переставний і сполучний закони, згрупуємо числові множники та множники з однаковими змінними:

$$\begin{aligned} & -0,2 \cdot x^4 \cdot y^6 \cdot 5 \cdot a \cdot x \cdot y^2 = \\ & = (-0,2 \cdot 5) \cdot x^4x \cdot y^6y^2 \cdot a. \end{aligned}$$

Застосуємо основну властивість степеня та обчислимо добуток числових множників:

$$(-0,2 \cdot 5) \cdot x^4x \cdot y^6y^2 \cdot a = -1 \cdot x^5 \cdot y^8 \cdot a = -x^5y^8a.$$

Отже, $-0,2x^4y^6 \cdot 5axy^2 = -ax^5y^8$.



В одночленах:

- числовий множник **1 не записують**;
- від числового множника **-1 залишають тільки знак «-»** перед буквеною частиною.

4. Дія третього ступеня з одночленами

qr.orioncentr.com.ua/RHMAI



Чи можна одночлени підносити до степеня?

Так, спираючись на закони множення та властивості дій зі степенями.



Задача 3 Піднесіть до п'ятого степеня одночлен:

1) $2x$; 2) $-x^5y^8a$.

Розв'язання

$$1. (2x)^5 = 2^5 \cdot x^5 = 32x^5.$$

$$2. (-x^5y^8a)^5 = (-1)^5 \cdot (x^5)^5 \cdot (y^8)^5 \cdot a^5 = -x^{25}y^{40}a^5.$$



Щоб піднести одночлен до n -го степеня, піднесіть до цього степеня кожний його множник.

5. Стандартний вигляд одночлена



Який одночлен вважають записаним у стандартному вигляді?

Упорядкований за певними правилами (табл. 9).



Таблиця 9

Добуток	Одночлен	
	довільний вигляд	стандартний вигляд
$2x^3 \cdot 5ab$	x^310ab	$10abx^3$
$-0,2x^4y^6 \cdot 5axy^2$	$-x^4y^6axy^2$	$-ax^5y^8$



Щоб подати одночлен у стандартному вигляді:

- 1) знайдіть добуток числових множників і результат запишіть першим множником;
- 2) знайдіть добуток усіх степенів з однаковими основами і результати запишіть наступними множниками.

В одночленах, записаних у стандартному вигляді, числовий множник називають *коефіцієнтом одночлена*. Наприклад:

одночлен	$-0,2x^4y^6$	$5axy^2$	$-c^8x^5y$
коефіцієнт	$-0,2$	5	-1

Запам'ятайте!

Степенем одночлена називається **сума показників степенів змінних**, що входять до нього.



Як знаходити степінь одночлена?

Спираючись на означення, наприклад, як у таблиці 10.



Таблиця 10

Одночлен	Сума показників	Степінь одночлена
$-0,2x^4y^6$	$4 + 6$	10
$5axy^2$	$1 + 1 + 2$	4
$5a^2$	2	2
8	0	0



Будь-яке число, відмінне від нуля, — це одночлен, степінь якого дорівнює нулю.

Дізнайтеся більше

До XVI ст. математичні викладки велися переважно словесно. Французький математик **Франсуа Вієт** (1540–1603) розмежував числа, величини та відношення і запропонував спеціальну буквену символіку. Він показав, що, оперуючи символами, можна розв'язати задачу в загальному вигляді. Вієта називають «батьком» алгебри.



qr.orioncentr.com.ua/63i08

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/51OqR

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
одночлен	monomial	Monom (<i>m</i>)	monôme

Пригадайте головне

1. Що таке одночлен?
2. Що означає додати одночлени?
3. Чи завжди можна добуток одночленів подати у вигляді одночлена?
4. Як піднести одночлен до степеня?
5. Який вигляд одночлена називають стандартним?
6. Що називають коефіцієнтом одночлена?
7. Як обчислити степінь одночлена?

Усне тренування

Обчисліть:

$$\begin{array}{lll}
 1) 6^2 + 8^2; & 0,6^2 + 0,8^2; & 60^2 + 80^2; \\
 2) 12^2 + 5^2; & 1,2^2 + 0,5^2; & 120^2 + 50^2.
 \end{array}$$

Розв'яжіть задачі

- 265'.** Який з даних виразів є одночленом:
- $$\begin{array}{lll}
 1) a^3; & 3) a^2 + 356; & 5) x^2 y^3 z^{12}; \\
 2) 3,6; & 4) 0; & 6) x + y?
 \end{array}$$
- 266'.** Які дії треба виконати, щоб знайти суму одночленів:
- $$1) a + 3a + (-a); \quad 2) -5c + c + 6c; \quad 3) 7x^2 + 2x^2?$$
- 267'.** Який із даних виразів є різницею одночленів $-45ab$ і $5ab$:
- $$1) 50ab; \quad 2) -50ab; \quad 3) -40; \quad 4) -40ab?$$
- 268'.** Який із даних виразів є добутком одночленів $-0,5xy$ і $4x^2$:
- $$\begin{array}{ll}
 1) -0,2x^2y; & 3) -2x^3y; \\
 2) 2x^2y; & 4) 0,9xy?
 \end{array}$$

269'. Які помилки допущено при піднесенні одночлена до квадрата:

1) $(0,2a)^2 = 0,4a^2$;

3) $(-3xy)^2 = -9x^2y^2$;

2) $(5ab^3)^2 = 5a^2b^5$;

4) $\left(2\frac{1}{3}b^5a^7\right)^2 = 4\frac{1}{9}b^{10}a^2$?

270'. Чи правильно заповнено таблицю 11?

Таблиця 11

Одночлен	$3,5x$	y	-1	a^6b^2	$2a^3$	ab
Коефіцієнт одночлена	3,5	1	-1	8	2	1
Степінь одночлена	0	1	0	1	3	1

271'. Чи можна згорнути в одночлен суму одночленів:

1) $34xy^2$ і $1\frac{8}{11}xy^2$; 2) $4,6x^9y^2$ і $4,6x^8y^2$; 3) $35a$ і $4,6$?

272'. Запишіть суму одночлена $4xy$ і одночлена:

1) -2 ; 2) $3xy$; 3) y .

273'. Знайдіть суму одночленів:



1) $-2x$, $-8x$ і $17x$;

2) x^2 , $0,5x^2$ і $22x^2$;

3) $-xy$, xy і $9xy$;

4) $5x^3$, $25x^3$, $6x^3$ і $-15x^3$.



qr.orioncentr.com.ua/hk8oh

274'. Згорніть суму в одночлен:

1) $1,1xy^2 + 6,9xy^2$;

2) $\frac{5}{8}x^{10} + (-2x^{10})$;

3) $10a + b + (-10a) + 3b$;

4) $4,1a + 0,2a + (-5a)$;

5) $4m + 2m + 54m + (-60m)$;

6) $n^3 + 3n^2 + n^2 + 2n^3 + (-3n^3)$.

275'. Знайдіть суму одночленів:

1) $9m$, m і $12m$;

2) a^2 , $12a^2$ і $-34a^2$;

3) $-3ac$, $4ac$ і ac .

287°. Піднесіть до степеня n одночлен $-xy^2$, якщо n дорівнює: 1) 3; 2) 5; 3) 200; 4) 125.

288°. Зведіть вираз до одночлена стандартного вигляду:



- 1) $5 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x$;
- 2) $a^3 \cdot a^3 \cdot a^3$;
- 3) $m^2 \cdot 3m \cdot 6$;
- 4) $-0,1 \cdot x \cdot 10 \cdot x^2 \cdot y$;
- 5) $2k^2 \cdot 3 \cdot l$;
- 6) $a^6 \cdot a^5$.



qr.orioncentr.com.ua/jUgTO

289°. Зведіть вираз до одночлена стандартного вигляду:

- 1) $-1 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot x$;
- 2) $0,5 \cdot a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot 0,2$.

290°. Який степінь має одночлен:

- 1) xy ;
- 2) $-\frac{5}{7}$;
- 3) $9k^{32}l^{18}$;
- 4) a^6b^5 ;
- 5) $0,32a$;
- 6) $-4cpxy$?

Назвіть коефіцієнт одночлена.

291°. Знайдіть степінь одночлена:

- 1) $0,26$;
- 2) $-7c$;
- 3) $4x^2m$;
- 4) $a^{10}b^5$.

Назвіть коефіцієнт одночлена.

292. Якими даними треба доповнити порожні клітинки таблиці 12?

Таблиця 12

Одночлен	$-xy$	$0,26a^2$	a	$1,75b$	$-7x$	$81y$	$0,5a^2$
Одночлен							
Сума одночленів	$34xy$	0	$21a$	b	$\frac{5}{8}x$	0	$1\frac{1}{2}a^2$

293. Якими даними треба доповнити порожні клітинки таблиці 13?

Таблиця 13

Одночлен	$-3xy$	$0,26a^2$	$-7ac$	$1,5b$	a^2
Одночлен					
Різниця одночленів	$5xy$	0	$9,2ac$	$-b$	$\frac{3}{4}a^2$

294. Спростіть вираз $b - 4a^3b^2 + (2b)^2a^3 + 3b$ та знайдіть його значення, якщо:

1) $a = 2\frac{1}{54}$, $b = -1$; 2) $a = -\frac{1}{36}$, $b = -\frac{3}{4}$.

295. Подайте одночлен $5\frac{3}{5}xma^3c^4$ у вигляді добутку:

- 1) двох одночленів;
 2) двох одночленів, один з яких $1,2ma^2$;
 3) двох одночленів, один з яких $-7c$.

296. Подайте xa^3 у вигляді добутку трьох одночленів.

297. Знайдіть одночлен, квадрат якого дорівнює:

1) $16a^8b^{14}$; 2) $1\frac{9}{16}x^6y^8$; 3) $0,0001a^{100}c^{40}b^{50}$.

298. Знайдіть одночлен, квадрат якого дорівнює:

1) $49b^2$; 2) $100x^{40}y^{20}$; 3) $0,04a^4c^4b^8$.

299. Знайдіть значення виразу $(a^2)^4 \cdot (a^4)^2 \cdot (a^2)^3 \cdot (a^2)^3 - a^{28}$, якщо $a = -0,0001$.

300. Знайдіть добуток одночленів:

1) $0,24x^4y^{16}$, $5z^2xy^2$ і $2z^{10}x^{15}y^2$;
 2) $3\frac{5}{8}(y^6)^5$, $(x^8)^2$, $-0,8zxy^9$ і $-\frac{3}{4}z^{12}y$;
 3) $0,4x^4y^{16}$, $-1,5x$, $-y^2$ і $0,02x^{15}y^2$.

301. Зведіть одночлен до стандартного вигляду:

1) $-0,5 \cdot x^{10} \cdot 26 \cdot y^{21} \cdot a \cdot 0,1 \cdot x \cdot y^{19}$;
 2) $\frac{2}{5} \cdot a^3 \cdot b^5 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot c^4 \cdot b^8 \cdot a^2 \cdot 40 \cdot b^2$;
 3) $-0,125 \cdot x^7 \cdot y^7 \cdot 16 \cdot x \cdot y^2 \cdot 10^2 \cdot y^{22} \cdot y^{24}$;
 4) $-6(y^6)^5 \cdot x^3 \cdot (y^8)^2 \cdot (x \cdot x^5)^6$.

Знайдіть степінь і коефіцієнт одночлена.

302. Зведіть одночлен до стандартного вигляду:

1) $-0,25 \cdot x^8 \cdot 8 \cdot y^3 \cdot 0,1 \cdot x^8 \cdot y^6$;
 2) $\frac{3}{4} \cdot x^3 \cdot y^8 \cdot 16 \cdot x \cdot c^{10} \cdot (-0,25) \cdot x^3$.

Знайдіть степінь і коефіцієнт одночлена.

- 303.** Ребро куба a зменшили на 10 %, а потім ще на 15 %. На скільки відсотків зменшився об'єм куба?
- 304*.** Подайте одночлен $-0,08zx^{11}y^5$ у вигляді добутку двох одночленів, степені одного з яких дорівнює:
1) 4; 2) 10; 3) 0.
- 305*.** Знайдіть n , за якого рівність є правильною:
1) $(b^2 \cdot a^5 \cdot a^n)^{2n} = (ba^5)^{20}$;
2) $a^2 \cdot b^2 \cdot a^{8n} \cdot a^{2n} = b \cdot a^8 \cdot b \cdot a^8 \cdot (a^8)^2$.
- 306*.** Знайдіть значення виразу $(a^{n+1} \cdot b^n ba^{n+3})^2 \cdot (a(ba)^{n+1})^6$, якщо $a^{5(n+2)} = 5$, $b^{4(n+1)} = 0,4$.
- 307*.** Визначте знак одночлена:
1) $((-b^{200})^{301} \cdot (-b)^{515})^{24}$, якщо $b < 0$;
2) $(-a)^{1001} \cdot (-2a \cdot (-c)^{15})^5$, якщо $a < 0$, $c > 0$.

Проявіть компетентність



- 308.** Початкову ціну a грн за 1 альбом знизили спочатку на 10 %, а потім — ще на 10 %. На скільки гривень менше коштують c альбомів після двох знижок?



- 309.** Початкова ціна товару — a грн. Яка ціна товару після трьох знижок на:
1) 10 %; 2) 30 %?

§ 8. МНОГОЧЛЕН ТА ЙОГО СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД

1. Що таке многочлен?

Ситуація. Галина й Денис допомагали батькам розрахувати площу даху їхнього будинку (мал. 8). Оскільки вони не знали точних розмірів даху, то позначили їх буквами. Свої результати Галина й Денис записали так:



Мал. 8



qr.orioncentr.com.ua/GLbg5

Галина

$$S = 2ad + 2bc + 2ab + cd$$

Денис

$$S = 2(a + c)(b + d) - cd$$



Чим відрізняються записи результатів Галини й Дениса?



Галина записала результат як суму одночленів, а Денис подав його складнішим виразом.

Запам'ятайте!

Вираз, що є сумою кількох одночленів, називається **многочленом**, а кожний доданок цієї суми — **членом многочлена**.

Задача 1 Чи можна перетворити у многочлен вираз:

1) $3 : (5x^3 - y^2)$; 2) $3(5x^3 - y^2)$?

Розв'язання

Вираз	Чи є вираз цілим?	Перетворення	Результат
$3 : (5x^3 - y^2)$	ні	—	перетворити у многочлен не можна
$3(5x^3 - y^2)$	так	розкриття дужок	многочлен $15x^3 - 3y^2$



Будь-який **цілий** вираз можна перетворити у многочлен.



Назву «многочлен» дають виразу лише за його початковим виглядом.

Виділяють окремі види многочленів.

Двочлен
 $7x + xy$

Тричлен
 $7x + xy + 2$



Вважають, що будь-який одночлен також є многочленом.



Чи можна спрощувати многочлен?



Так.

Наприклад: $4x^5y^2 - 3 - 5x^5y^2 = -x^5y^2 - 3$.

2. Стандартний вигляд многочлена

qr.orioncentr.com.ua/yNYh0



Який многочлен вважають записаним у *стандартному вигляді*?

У якого кожний член є одночленом стандартного вигляду і немає подібних доданків (табл. 14).



Таблиця 14

Запис многочлена	
<i>Довільний вигляд</i>	$7yx - xy + 10abx^3 - x^4y^6axy^2 + 2 - 5$
<i>Стандартний вигляд</i>	$6xy + 10abx^3 - ax^5y^8 - 3$



Щоб звести многочлен до стандартного вигляду:

- 1) подайте кожний член многочлена в стандартному вигляді;
- 2) зведіть подібні члени многочлена.

Для многочлена можна визначити *старший член*. У таблиці 15 наведено міркування для многочлена $5axy^2 - 0,2x^4y^6$.

Таблиця 15

Член многочлена	Сума показників	Степінь члена многочлена	Чи є старшим членом многочлена?
$5axy^2$	$1 + 1 + 2$	4	Ні
$-0,2x^4y^6$	$4 + 6$	10	Так

Запам'ятайте!

Степенем многочлена називається степінь його старшого члена.

Задача 2 Знайдіть степінь многочлена:

1) $x^2 - 15xy - x^5y^2 - 3$; 2) $x^3y^2 - x^2y^3$.

Розв'язання

1. Старшим членом многочлена $x^2 - 15xy - x^5y^2 - 3$ є член $-x^5y^2$. Його степінь дорівнює 7. Тому степінь многочлена дорівнює 7.

2. Многочлен $x^3y^2 - x^2y^3$ має два члени однакового степеня 5. Степінь цього многочлена дорівнює 5.



Щоб визначити степінь многочлена, знайдіть степінь кожного його члена та з'ясуйте, який із них є найбільшим.

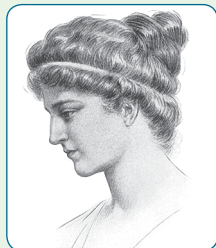
Знайшовши степені членів многочлена, його можна *впорядкувати за степенями членів*. Наприклад:

$$\begin{aligned} x^2 - 15xy - x^5y^2 - 3 &= \\ &= -x^5y^2 + x^2 - 15xy - 3. \end{aligned}$$

Дізнайтеся більше

1. Виділяють особливі види многочленів, які знайшли широке застосування в математиці. *Симетричний многочлен* — многочлен від n змінних (n — натуральне число), що не змінюється при будь-яких перестановках змінних. Наприклад, симетричними є многочлени від двох змінних: $-43xy + x^5y^2 + x^2y^5$, $x^2 - 9 + y^2$. Справді, якщо в цих многочленах замінити x на y , а y на x , то одержимо такий самий многочлен.

2. **Гіпатія** (близько 350-370-415) — грецька жінка-астрономія, філософіня, математикиня. Донька математика Теона з Александрії. Гіпатія отримала гарну освіту, в Афінах вивчала праці Платона й Арістотеля. А потім, повернувшись до Александрії, викладала математику, механіку, астрономію та філософію. qr.orioncentr.com.ua/72800



Словничок

qr.orioncentr.com.ua/УрЕр6

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
многочлен	polynomial	Polynom (<i>n</i>)	polynôme

Пригадайте головне

1. Що таке многочлен?
2. Які члени многочлена називають подібними?
3. Який член многочлена називають старшим?
4. Що називається степенем многочлена?
5. Як визначити степінь многочлена?
6. Як упорядкувати многочлен за степенями його членів?

Усне тренування

1. Перетворіть у десятковий дріб:

1) $\frac{1}{4}$; 2) $4\frac{1}{5}$; 3) $1\frac{3}{4}$; 4) $\frac{3}{8}$; 5) $\frac{5}{8}$; 6) $2\frac{1}{20}$.

2. Знайдіть число, обернене до даного:

1) 3; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0,4; 4) 0,03; 5) $1\frac{3}{4}$; 6) $2\frac{1}{20}$.

Розв'яжіть задачі

310. Який із даних виразів є многочленом:

1) $3a^2 \cdot x^3$;

3) $5 : x^3$;

2) $x^3 + x^{12}$;

4) $\frac{3}{x} + 5x$?

311'. Назвіть одночлени, сума яких є многочленом:

1) $4x + 3$;

3) $6x + 4 + x^3 + 2x^2$;

2) $5x^5 + x^6 + x$;

4) $x^{10} + 3x^5 + 7$.

312'. Запишіть двочлен, що є сумою одночленів:

1) x^2, x ; 2) $2x, 6$; 3) $4x, 6x$; 4) a^2, a^3 .

313'. Запишіть тричлен, що є сумою одночленів:

1) $x^2, x, 5$; 2) $x, 4x, 2x$; 3) x^3, y^3, z^3 .

314'. Чи правильно виділено подібні члени многочлена:

1) $a^2 + 2x^2 + 2a + 2x + x$;

2) $a^2 + x^2 + a + x + x$;

3) $a^2 + x^2 + a + x + x$;

4) $a^2 + 4x^2 + a^3 + 4$?

315'. У якому випадку правильно зведено подібні члени многочлена $-x^2 - x + 1 + 2x^2 + 3x + 4 + 2x$:

1) $-2x^2 - 3x + 5$;

3) $x^2 - 5x + 5$;

2) $x^2 - x + 5$;

4) $x^2 + 4x + 5$?

316'. Чи правильно, що старшим членом многочлена $x^3 + 5x^2 + 4x + x^5 + 3$ є:

1) x^3 ; 2) x^5 ; 3) $5x^2$; 4) 3; 5) $4x$?

317'. Який із даних многочленів записано в стандартному вигляді:

1) $x^2 + 3x + x^2 + 2$; 3) $2x^2 - 2x^3$;

2) $x \cdot x + 5x + 2$; 4) $-3x - x^2$?

318'. Чи можна згорнути многочлен в одночлен:

1) $3 + 4x + 3x$; 2) $x^2 + x^2$; 3) $3x + 5x + 4x$?

319°. Назвіть одночлени, які є членами многочлена:

1) $x - 7$; 3) $6x - 2y^2$;

2) $x^9 + 10x$; 4) $4 - 3n^3m + n^2$.

320°. Назвіть одночлени, які є членами многочлена:

1) $7ac + 4$; 2) $6x^{12} - x$; 3) $a - 6c - 2c^2$.

321°. Запишіть многочлен, що є сумою одночленів:

1) $4a^2, -a, 2a^2, 9, a^3$; 3) $-5x^8, -4x^4, 8, 6x$;

2) $-2, 3x, -x^2, x^5$; 4) $2ac^3, -3c^2, -5$.

322°. Зведіть подібні члени многочлена:

1) $12x + 9 - 4x - 5$;

2) $-2a + 10b + 7b - 13a$;

3) $6n + 8n - 5n - 3n + 7$;

4) $x^2 + 3x - 4x^2 + 2x$;

5) $-ac + a^2 - ca + 3a^2 + 2ca$;

6) $4,5xy - 6x^4 - 5\frac{1}{2}xy - 4x^4 + xy$.

qr.orioncentr.com.ua/JcPxL



323°. Зведіть подібні члени многочлена:

- 1) $-5x + 11x - 4x + 9x$;
- 2) $3,8 - 7x^2 + 3,4 - 4x^2 - 3x^2$;
- 3) $-5m^2 - 5m + 1 + 2m^2 + 9 + 2m$.

324°. Спростіть вираз:

- 1) $xx^2 + x^2 + \frac{1}{2}x^5 + (-0,5x^5)$;
- 2) $100 + p^2 + 1,4p - 2p^2 + 0,6p - 28$;
- 3) $-4 + 3ab^2a + ab + 5 - 3ab + a^2b^2$;
- 4) $-x^2 + xy^2 + 3x^2 - 8yux$.

325°. Назвіть старший член і степінь многочлена:

- 1) 5;
- 2) $4 + 3x$;
- 3) $1 + xy + x^2$;
- 4) $-2 + 7xy + 5x^3$.

326°. Назвіть старший член і степінь многочлена:

- 1) $50 + a$;
- 2) $-50 + a + b$;
- 3) $2 - 27ab + a$.

327°. Упорядкуйте за степенями членів многочлен:

- 1) $2 + 4a + 6a^8 + 1,8a^5 + 3a^2 - 2a^{10} - a^4$;
- 2) $xy^2 + 19x^2 + 3xy + 3xy^3$;
- 3) $1,6ab + b^2a^2 - 2b^3a^3 + 3,7$;
- 4) $7x^4 + 7x^5 - x^3 - 10x^2 - 6$.



328°. Упорядкуйте за степенями членів многочлен:

- 1) $2 + 3x^2 - x^4 + 4x + 2x^3$;
- 2) $y^2 + x^2 + 5xy + xy^3 + 8$.

qr.orioncentr.com.ua/7t6jn

329°. Дано многочлен $2xy - 3x - xy^2 - 8x^4y + 5$. Запишіть:

- 1) одночлени, які складають многочлен;
- 2) вільний член многочлена;
- 2) старший член многочлена;
- 4) степінь многочлена.

Упорядкуйте за степенями членів многочлен.

330°. Дано многочлен $-3a^6 - a^4 + a + 0,2a^3$. Запишіть:

- 1) одночлени, які складають многочлен;
- 2) вільний член многочлена;

3) старший член многочлена;

4) степінь многочлена.

Упорядкуйте за степенями членів многочлен.

331. Знайдіть суму двох чисел, одне з яких дорівнює $k\%$ числа 48, а інше — $d\%$ числа 100.

332. Знайдіть суму двох чисел, одне з яких дорівнює 40% числа k , а інше — 20% числа d .



333. Початкова ціна товару — a грн. Яка ціна товару після двох послідовних знижок на $a\%$? Відповідь запишіть у вигляді многочлена.

334. Ребро куба a збільшили на $a\%$, а потім — ще на $a\%$. Знайдіть довжину ребра куба після двох збільшень. Відповідь запишіть у вигляді многочлена.

335. Зведіть подібні члени многочлена:

1) $7xy^2 + 7x^2y - 4yx^2 + 4xy^2 + xy - x^2y$;

2) $10a^2 - 7a - 3b^2 - 3a + (-4a) - 21a^2 - 4a + 2b^2$;

3) $14m - 3n^3 - 2m - 3n^2 - 54m + 4n^3 + (-n)^3 - n^3$.

336. Спростіть многочлен $-0,5b - 4a^3b^2 + (2b)^2a^3 + \frac{1}{4}b + a + (-0,5)^2b$ та знайдіть значення отриманого виразу, якщо $a = 2$, $b = -\frac{9}{73}$.

337. Запишіть у стандартному вигляді многочлен:

1) $-(yz)^2 + xy^2 + x^2x - yux$;

2) $(a^2)^5 + 0,3(a^2)^3 - a^{10} + 0,7(a^3)^2 - a^6$;

3) $5\frac{1}{5}(x^2)^2 + \frac{1}{8}(x^3 \cdot x^5 \cdot x^2) - 0,2x^4 + (-0,125x^{10}) + 1$;

4) $4y^4y^5 + 4 + (-2^3)^2 \cdot ((-0,5y)^3)^3 - y \cdot (2y^2)^4$;

5) $0,4axy^2 \cdot a + (-3xy)^2 - x^2x^3 - 1,5a^2(-x) \cdot (-y)^2 + x^5$.

Який степінь отриманого многочлена?

338. Запишіть у стандартному вигляді многочлен:

1) $0,1(y^2)^2 + 6,9y^2 + \frac{1}{8}y^8 - 0,125yy^7$;

$$2) (2k^8)^3 - (2k^3k)^6 - 0,72k^3 - 1,2k^2 \cdot 0,6k;$$

$$3) -a^2b^6 - 3a^5b^2 + (-b^2a)^2b^2 - 24b^4a^3.$$

Який степінь отриманого многочлена?

- 339.** Подайте многочлен $5x^2 - x + 6$ у вигляді суми чотирьох одночленів, один з яких дорівнює:
1) x^2 ; 2) $2x^2$; 3) $5x$; 4) $-5x$; 5) x ; 6) 8 .
- 340.** Скільки різних многочленів можна утворити з одночленів $10a^3c$, $6xy$, a^3 ?
- 341*.** Дано одночлени $10a$, $6xy$, a^3 , $3b$, 5 . Утворіть із них многочлен, старший член якого дорівнює: 1) $10a$; 2) $6xy$; 3) 5 ; 4) a^3 . Скільки розв'язків має задача?
- 342*.** Знайдіть степінь многочлена, у який перетвориться даний вираз:
1) $(2b \cdot 3b^nba^n)^2 + (-4b)^3 \cdot (b^2)^n \cdot \frac{3}{4}a^{2n}b - 4b^3$;
2) $a^{n+3} \cdot a^{n+2} + b^3 \cdot a^{n+2} + b \cdot (ba^{n+1})^2$.
- 343*.** Спростіть вираз $(b \cdot a^5)^{2n} \cdot a + ba^6a^{10} + a^2 \cdot b^8 \cdot a^{8n} \cdot a^{4n} - b(a^8)^2 - b^na \cdot b^n \cdot a^{10n}$ та знайдіть степінь многочлена.

Проявіть компетентність



- 344.** Початкову ціну a грн за 1 кг крупи знизили на 10 %, а початкову ціну b грн за 1 кг цукру знизили на 5 %. На скільки гривень зменшиться вартість 4 кг цукру і 8 кг крупи після цієї знижки? Складіть вираз за умовою задачі, спростіть його та обчисліть, якщо $a = 12$, $b = 10$.
- 345.** На першу клітинку шахової дошки поклали k зерняток, на другу — у k разів більше, ніж на першу, на третю — у k разів більше, ніж на другу і т. д. Скільки зерняток буде на: 1) шести клітинках; 2) десяти клітинках? Відповідь запишіть у вигляді многочлена.

§ 9. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

1. Додавання многочленів

Ситуація. Олег з Оксаною розв'язували задачу: «Легковий автомобіль був у дорозі 3 год. Його швидкість протягом перших двох годин руху становила a км/год, а решту часу — була на 10 км/год більшою. Яку відстань проїхав автомобіль?». Дані задачі та деякі висновки вони розмістили в таблиці 16.



qr.orioncentr.com.ua/zFtWw

Таблиця 16

	Час	Швидкість	Відстань
I частина шляху	2 год	a км/год	$2a$ км
II частина шляху	1 год	$(a + 10)$ км/год	$(a + 10)$ км



Як знайти відстань, яку проїхав автомобіль?

Додати два многочлени $2a$ і $a + 10$.



Запам'ятайте!

Додати (відняти) многочлени означає скласти вираз, що є сумою (різницею) даних многочленів, та спростити його, якщо це можливо.

Задача 1 Знайдіть суму многочленів

$$2y^2 + x^2y - 5 \text{ і } 3 - 7x^2y.$$

Розв'язання

Складемо вираз:

$$(2y^2 + x^2y - 5) + (3 - 7x^2y) =$$

Розкриємо дужки:

$$= 2y^2 + x^2y - 5 + 3 - 7x^2y =$$

Зведемо подібні члени:

$$= 2y^2 - 6x^2y - 2 =$$

Упорядкуємо за степенями: $= -6x^2y + 2y^2 - 2$.



Сума многочленів завжди має зміст.

2. Віднімання многочленів

Задача 2 Знайдіть різницю многочленів
 $2y^2 + x^2y - 5$ і $3 - 7x^2y$.

Розв'язання

Складемо вираз: $(2y^2 + x^2y - 5) - (3 - 7x^2y) =$
 Розкриємо дужки: $= 2y^2 + x^2y - 5 - 3 + 7x^2y =$
 Зведемо подібні члени: $= 2y^2 + 8x^2y - 8 =$
 Упорядкуємо за степенями: $= 8x^2y + 2y^2 - 8$.



Під час додавання (віднімання) двох многочленів знаки членів другого компонента дії:

- **залишаємо без змін**, якщо виконуємо **додавання**;
- **змінюємо на протилежні**, якщо виконуємо **віднімання**.

Додавання многочленів підкоряється переставному і сполучному законам додавання.

3. Скорочений запис числа

qr.orioncentr.com.ua/IJZCo



Як коротко записати число, у якому a сотень, b десятків і c одиниць?

Скорочений запис числа розгортають у суму розрядних доданків так:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c.$$

$\overline{abc}$.



Задача 3 Знайдіть двоцифрове число, яке більше за суму своїх цифр на 18, а за добуток цифр — на 14.

Розв'язання Нехай $\overline{ac}$ — шукане число, тоді:

$$\overline{ac} = 10a + c,$$

$a + c$ — сума цифр шуканого числа,

ac — добуток його цифр.

За умовою, $10a + c - (a + c) = 18$, звідси:

$$10a + c - a - c = 18, 9a = 18, a = 2.$$

За умовою, $10a + c - ac = 14$. Урахувавши, що $a = 2$, одержимо:

$$20 + c - 2c = 14, c = 6.$$

Отже, 26 — шукане число.

Дізнайтеся більше

У десятковій системі числення для запису чисел використовуються десять цифр. У цій системі будь-яке ціле невід'ємне число можна подати за допомогою степенів числа 10 ($10^1 = 10$; $10^2 = 100$ і т. д.). Наприклад: $25 = 20 + 5 = 2 \cdot 10 + 5 = 2 \cdot 10^1 + 5 = 25_{10}$. Індекс внизу вказує систему числення, у якій записане дане число.

Двійкова система числення — це система, у якій для запису чисел використовуються дві цифри: 0 і 1. Щоб записати число, його подають за допомогою степенів числа 2. Наприклад, $25 = 16 + 8 + 1 = 2^4 + 2^3 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1$. Звідси $25 = 11001_2$.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/c4V4t

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
сума многочленів	sum of polynomials	Summe der Polynome	somme de polynômes

Пригадайте головне

1. Що означає — додати многочлени?
2. Як віднімають многочлени?
3. Сформулюйте закони додавання для многочленів.
4. Як коротко записати двоцифрове число? Трицифрове число?

Усне тренування

1. Знайдіть значення виразу:

1) $-3564 : (-9) \cdot (-11 \cdot 2 + 22)$;

2) $-16 : (14 + 240 : 120) - 324$.

2. Обчисліть:

1) $56 : (-0,08) : \frac{7}{9}$; 2) $81 : (-0,9) : 3 \cdot (-0,01)$.

Розв'яжіть задачі

- 346'.** Чи правильно виконано додавання двочлена $a + x$ та одночлена x :
- 1) $a + x + x = a + 2x$;
 - 2) $2(a + x) + x = 2a + 2x^2$?
- 347'.** Треба знайти різницю многочленів:
- 1) $3y + 4x$ і $2x$;
 - 2) $4y$ і $y^2 + 8y$.
- Перед якими одночленами треба змінити знак?
- 348'.** Чи правильно подано число як суму розрядних доданків:
- 1) $\overline{ab} = a + 10b$;
 - 2) $\overline{ab} = 10a + b$;
 - 3) $\overline{ba} = 10a + b$;
 - 4) $\overline{ba} = 10b + a$?
- 349°.** Знайдіть суму многочленів:
- 1) m і $m + 4$;
 - 2) $3c$ і $4d - c$;
 - 3) x і $-x + y$;
 - 4) 10 і $5d + 0,4$;
 - 5) cd і $3 + 2cd$;
 - 6) $mn + m^2$ і nm ;
 - 7) k^2 і $k^2 - k$;
 - 8) $1,25x$ і $0,25x + x^2$;
 - 9) $-5d$ і $-d + 5d^2 + 1$;
 - 10) $-5z$ і $-9z^2 + 5z + 9$.
- 350°.** Знайдіть суму многочленів:
- 1) x і $2x + 5$;
 - 2) $7x$ і $-x - y$;
 - 3) x^2 і $-x^2 + x$;
 - 4) 4 і $10x + 12$.
- 351°.** Виконайте додавання многочленів:
- 1) $x + y$ і $-x + y$;
 - 2) $m + 3n$ і $-m - n$;
 - 3) $x + 4$ і $-x - 6$;
 - 4) $4x + 3$ і $7x - 1$;
 - 5) $x^2 + 3x$ і $x^2 - 2x$;
 - 6) $7y^2 - 2y$ і $y^2 - y$;
 - 7) $8x^2 + 9$ і $5x^2 + 3$;
 - 8) $x + 5y$ і $-4x + y$;
 - 9) $x^2 + y^3$ і $x^2 - y^3$;
 - 10) $4k^2 - k$ і $4k^2 + k$;
 - 11) $5a^2 + 7$ і $-a^2 + 4a$;
 - 12) $a - 3$ і $a^2 - 2a + 3$;
 - 13) $7k^2 + 2k + 2$ і $-3k^2 - k + 4$;
 - 14) $4x^2 + 2y + xy$ і $-x + 4xy$.
- 352°.** Виконайте додавання многочленів:
- 1) $x + 2y$ і $5x - y$;
 - 2) $m + 3$ і $m - 2$;
 - 3) $x^2 + y^2$ і $x^2 - y^2$;
 - 4) $2y^2 - 2y$ і $-5y^2 + y$.

353°. Доведіть тотожність:

$$1) (y - 2x) + (x + 3y) + (x - 4y) = 0;$$

$$2) (4x - y) + (-7x + y - 1) + (3x + 1) = 0.$$

354°. Доведіть тотожність $(3x - 4y) + (4y - 3x) = 0$.

355°. Знайдіть різницю многочленів:

$$1) m \text{ і } m + m^2;$$

$$8) m + 5n \text{ і } m - n;$$

$$2) x^2 \text{ і } x^2 - 3;$$

$$9) x^2 + 6x \text{ і } -x^2 + 2x;$$

$$3) m + m^2 \text{ і } m;$$

$$10) y^2 + y \text{ і } -y^2 - y;$$

$$4) 10 \text{ і } 5x + 0,4;$$

$$11) x + 3y \text{ і } -3x + y;$$

$$5) x \text{ і } -x + y;$$

$$12) x^2 + 7y^2 \text{ і } x^2 - 7y^2;$$

$$6) -3m \text{ і } -5m + 8;$$

$$13) -x^2 - x + 12 \text{ і } x^2 - x - 4;$$

$$7) a + y \text{ і } -a + y;$$

$$14) x^2 + 4y^2 + xy \text{ і } -x^2 + xy.$$

356°. Знайдіть різницю многочленів:

$$1) a \text{ і } a + y;$$

$$5) x^2 - 5x + 9 \text{ і } -5x - 2;$$

$$2) m + n \text{ і } -n;$$

$$6) 5x^3 + x^2 + x \text{ і } x^3 - x^2 + x.$$

$$3) x^2 + 8x \text{ і } -8x^2 + x;$$

$$4) y^2 + 4 \text{ і } -y^2 - 3y;$$

357°. Якими даними треба



доповнити порожні клітинки таблиці 17?



qr.orioncentr.com.ua/G3Rar

Таблиця 17

Одночлен	2	x	y^2	x^4
Многочлен	$a + 3$	$-5x + 7$	$-y^2 + 1$	$5x^4 - 4x^2$
Сума				
Різниця				

358°. Якими даними треба доповнити порожні клітинки таблиці 18?

Таблиця 18

Многочлен	$a + b$	$30x$	$y + 5$
Многочлен	$a - b$	$15 - 10x$	$-y + 10$
Сума			
Різниця			

359°. Знайдіть значення виразу:

- 1) $(3x^2 + 4x + 1) + (x + 5) - (x^2 + 5x)$, якщо $x = 3$;
- 2) $(4x + 9) - (3x - 7) - 63$, якщо $x = -100$;
- 3) $(3x + 2) - (x - 7) + (-2x - 14) + 5$, якщо $x = 0,643$;
- 4) $(x^4 + x^2 + 3x) - (x^4 + x^2 - 2x)$, якщо $x = 5$.

360°. Знайдіть значення виразу:

- 1) $(2x - 1) - (5x - 2) - 11$, якщо $x = 10$;
- 2) $(m^4 + m^3 + m^2 + 1) - (m^4 - m^3 + m^2)$, якщо $m = 2$.

361°. Складіть скорочений



запис числа, у якого:

- 1) b десятків і c одиниць;
- 2) c десятків і a одиниць;
- 3) m десятків і n одиниць;
- 4) k десятків і p одиниць;
- 5) a сотень, b десятків і c одиниць;
- 6) a сотень, c десятків і a одиниць;
- 7) a сотень, a десятків і n одиниць;
- 8) p сотень, p десятків і p одиниць;
- 9) 6 сотень, 8 десятків і n одиниць;
- 10) p сотень, 7 десятків і 2 одиниці.

Подайте це число як суму розрядних доданків.

qr.orioncentr.com.ua/KuHzN



362°. Складіть скорочений запис числа, у якого:

- 1) a десятків і p одиниць;
- 2) c сотень, a десятків і p одиниць.

Подайте це число як суму розрядних доданків.

363. Спростіть вираз:

- 1) $(-3ab + 2a^2b) + (6ab - a^2b + 5b)$;
- 2) $(2a^2 + 3a + 4b) + (2a - 3a^2 - b)$;
- 3) $(0,5a + b) + \left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b\right)$;
- 4) $\left(1\frac{2}{3}a^2 + 6,3b^2\right) + \left(-\frac{2}{3}a^2 - 4b^2\right) + (-a^2 + 4)$;
- 5) $(7xy^2 + 7x^2y - 5x^2 + 2) + (3xy + 3xy^2 - x^2)$;
- 6) $(a^2 + 2b^2) + (3a^2 + c - b^2) + (-c - 2a^2) + (-2a^2 - b^2)$;
- 7) $4,8a^2 - 0,1ab + 5,6b^2 + 3,7a^2 - 3,5b^2 - 2 - 3,1ba + 2$.

364. Доведіть, що сума:

- 1) трьох послідовних натуральних чисел ділиться на три;
- 2) п'яти послідовних натуральних чисел ділиться на п'ять.

365. Доведіть, що сума трьох послідовних парних натуральних чисел ділиться на шість.

366. Знайдіть різницю многочленів:

- 1) $0,9a + 0,8b$ і $0,1a - 0,2b$;
- 2) $\frac{1}{2} + m$ і $\frac{3}{4}m + \frac{3}{2} + n$;
- 3) $0,2m^3 + 0,1m + \frac{1}{2}$ і $0,5 + m$;
- 4) $100 + k^2 + 1,4k$ і $1,2k^2 - 0,6k - 100$;
- 5) $9,7m + 3,02mn - 3,1n^2$ і $-1,3m - 5mn + 4m^2$.

367. Якими даними треба доповнити порожні клітинки таблиці 19?

Таблиця 19

Многочлен	$2x^2 - y^2 - 6$		$y^3 - 4y^4 + 5$
Многочлен		$x^3 + x - 5$	
Сума	$5x^2 + 3y^2 - 3$	$x^4 + x^3 + x^2 + 4x$	$-y^2 + y^5 - 3$

368. Нехай $a = x^2 + x - y - 2$, $b = 3x^2 - x + 15 + y$, $c = -4x^2 + 2x - 3$.

Спростіть вираз: 1) $a + b + c$; 2) $a - b + c$.

369. Знайдіть значення виразу:

- 1) $(1,4xy^2 + 5xy + 0,25) - (xy - 1,8xy^2 + 0,75) - (3,2xy^2 - 3)$, якщо $xy = -1$;
- 2) $(4y^2 - 5x^2 + 8) - (3y^2 - 1,25y + 10 - 6x^2) - 1\frac{1}{4}y$, якщо $x^2 + y^2 = 2$.

370. Знайдіть значення виразу $9x^2 + (x^2 - x^3) + (x^3 - x^4) + \dots + (x^9 - x^{10}) - (4 - x^{10})$, якщо $x = 0,5$.

- 371.** Доведіть, що значення виразу $(\frac{1}{2}am + \frac{3}{4}a) - (0,5am - \frac{1}{2}) - (0,75a + 6)$ не залежить від значення змінних, що входять до нього.
- 372.** Доведіть, що значення виразу $(x^2 + 4x + 2) - (x^2 - 12x - 2)$ кратне числу 4 за будь-якого натурального значення x .
- 373.** Доведіть, що значення виразу $(46a - 3) - (a - 12)$ кратне числу 9 за будь-якого натурального значення a .
- 374.** Запишіть у вигляді многочлена вираз:
- 1) $\overline{abc} - \overline{ab}$;
 - 2) $\overline{abc} + \overline{ab}$;
 - 3) $\overline{abc} - \overline{ab} + \overline{acb}$;
 - 4) $\overline{abc} + \overline{ab} - \overline{acb}$;
 - 5) $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac}$;
 - 6) $\overline{abc} - \overline{acb} - \overline{bac}$.
- 375.** Запишіть у вигляді многочлена вираз:
- 1) $\overline{ba} - \overline{ab}$;
 - 2) $\overline{ba} + \overline{aa} + \overline{ba}$.
- 376.** Доведіть, що різниця двоцифрового числа і числа, яке записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 9.
- 377.** Доведіть, що сума двоцифрового числа і числа, яке записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 11.
- 378*.** Знайдіть усі трицифрові числа $\overline{abc}$, для яких виконується умова $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 444$.
- 379*.** У чотирицифровому числі перша цифра (кількість тисяч) — 7. Якщо в даному числі цю цифру переставити на останнє місце, то одержимо число, менше від даного на 864. Знайдіть це число.
- 380*.** Знайдіть трицифрове число $\overline{abc}$, якщо воно дорівнює сумі чисел $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$.

Проявіть компетентність

381. Ви поклали в банк А x грн під 20 % річних, а в банк В — y грн під 30 % річних. Який прибуток ви одержите через два роки?



382. У вас є три відра, кожне з яких уміщує цілу кількість літрів. Якщо вилити повне перше відро води у друге, то вона займе $\frac{2}{3}$ його об'єму, а якщо вилити у третє, то $\frac{3}{4}$ його об'єму. Сума об'ємів трьох відер менша від 30 літрів. Знайдіть об'єм кожного відра.



§ 10. МНОЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

1. Множення одночлена на многочлен

Ситуація. Олег з Оксаною розв'язували задачу: «Першого дня легковий автомобіль їхав b год зі швидкістю a км/год, а другого — на 2 год довше з тією самою швидкістю. Яку відстань проїхав автомобіль другого дня?». Дані задачі та деякі висновки вони розмістили в таблиці 20.



qr.orioncentr.com.ua/Vl6gu

Таблиця 20

	Час	Швидкість	Відстань
I день	b год	a км/год	ab км
II день	$(b + 2)$ год	a км/год	$a(b + 2)$ км



Як знайшли відстань, яку проїхав автомобіль за другий день?

Помножили одночлен a на многочлен $b + 2$.



Запам'ятайте!

Помножити многочлен на одночлен означає скласти вираз, що є сумою добутків даного одночлена і кожного члена многочлена.

Задача 1 Знайдіть добуток одночлена y^2 і многочлена $-x + 2y$.

Розв'язання

Складемо вираз:

Розкриємо дужки:

Подамо як многочлен:

$$\begin{aligned} y^2 \cdot (-x + 2y) &= \\ &= y^2 \cdot (-x) + y^2 \cdot 2y = \\ &= -xy^2 + 2y^3. \end{aligned}$$



Чи зміниться добуток одночлена і многочлена, якщо їх поміняти місцями?

Ні.



$$\begin{aligned} \text{Наприклад, } y \cdot (x + 1) &= xy + y, \\ (x + 1) \cdot y &= xy + y. \end{aligned}$$

$$\text{Звідси } y(x + 1) = (x + 1)y.$$



Множення одночлена і многочлена підкоряється переставному і сполучному законам множення, а також розподільному закону множення відносно додавання.

2. Множення многочленів

qr.orioncentr.com.ua/3xbfM

Запам'ятайте!

Помножити многочлен на многочлен — означає скласти вираз, що є сумою добутків кожного члена одного многочлена на кожний член іншого многочлена.

Задача 2 Знайдіть добуток многочленів $y^2 - y$ і $2y - 1$.

Розв'язання

Складемо вираз:

$$(y^2 - y) \cdot (2y - 1) =$$

Запишемо суму добутків: $= y^2 \cdot (2y - 1) + (-y) \cdot (2y - 1) =$

Розкриємо дужки: $= y^2 \cdot 2y + y^2 \cdot (-1) + (-y) \cdot 2y + (-y) \cdot (-1) =$

Подамо як многочлен: $= 2y^3 - 3y^2 + y$.



Щоб помножити многочлени:

- помножте кожний член одного многочлена на кожний член іншого многочлена;
- спростіть отриманий многочлен, якщо це можливо.



Чи можна підносити многочлени до степеня?

Так.



Наприклад:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b),$$

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b).$$

Запам'ятайте!

Піднести многочлен до степеня $n > 1$ означає скласти вираз, що є добутком n множників, кожний з яких є даним многочленом.

Дізнайтеся більше

Митропольський Юрій Олексійович (1917–2008) — видатний механік і математик, академік Національної академії наук України. Народився в селі Чернишівка на Полтавщині. З 1950 р. Ю. О. Митропольський працював в Інституті математики НАН України, який згодом і очолив. Він є автором понад 750 наукових праць.

qr.orioncentr.com.ua/o26D5



Словничок

qr.orioncentr.com.ua/YlgjE

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
добуток многочленів	product of polynomials	Produkt der Polynome	produit de polynômes

Пригадайте головне

1. Як помножити одночлен на многочлен?
2. Як помножити многочлен на многочлен?
3. Що називають степенем многочлена з натуральним показником, більшим за 1?
4. Які закони справджуються для множення многочленів?

Усне тренування

1. Обчисліть:

$$1) -\frac{2}{9} : (-18); \quad 2) -\frac{3}{11} \cdot \left(-\frac{11}{15}\right); \quad 3) -\frac{18}{25} : (-0,36).$$

2. Знайдіть значення виразу $(a + b)^2$, якщо:

$$1) a = 2, b = -4; \quad 2) a = -\frac{1}{3}, b = -1\frac{2}{3}; \quad 3) a = -\frac{2}{5}, b = 2,4.$$

3. Знайдіть значення виразу $a^2 + b^2$, якщо:

$$1) a = -3, b = 4; \quad 2) a = 10, b = -6; \quad 3) a = 5, b = 0,2.$$

4. Знайдіть значення виразу $(a - b)^2$, якщо:

$$1) a = 2, b = -4; \quad 2) a = -2, b = 4; \quad 3) a = -2, b = -4.$$

Розв'яжіть задачі

383'. Чи правильно виконано множення многочлена і одночлена:

$$1) (1 + x) \cdot x = 1 + 2x; \quad 2) (1 + x) \cdot x = x + x^2?$$

384'. Знайдіть добутки $x \cdot (a + b)$ і $(a + b) \cdot x$. Порівняйте отримані многочлени.

385'. Знайдіть добутки $(x \cdot (a + b)) \cdot x$ і $(a + b) \cdot (x \cdot x)$. Порівняйте отримані многочлени.

386'. Чи правильно виконано множення многочленів:

- 1) $(1 + x) \cdot (x + 2) = 2 + 2x$;
- 2) $(1 + x) \cdot (x + 2) = 3 + 2x$;
- 3) $(1 + x) \cdot (x + 2) = x^2 + 2x + 2$;
- 4) $(1 + x) \cdot (x + 2) = x^2 + 3x + 2$?

387'. Яка з рівностей є правильною:

- 1) $(x + y)^2 = (x + y) \cdot 2$;
- 2) $(1 + x)^2 = (1 + x) \cdot (x + 1)$;
- 3) $(y + x)^3 = (y + x) \cdot (x + y) \cdot (x + y)$?

388°. Помножте одночлен і двочлен:



- 1) $-x \cdot (x + y)$;
- 2) $x \cdot (x - y)$;
- 3) $x \cdot (x - 1)$;
- 4) $m \cdot (3m + 2)$;
- 5) $(m + 2) \cdot m$;
- 6) $3m \cdot (1 + m)$;
- 7) $(a + b) \cdot (-2a)$;
- 8) $(a^2 + b^2) \cdot 4a$;
- 9) $(mn - n) \cdot 7m$;
- 10) $k^2 \cdot (-k^2 + k)$;
- 11) $-10x \cdot (1,5x^2 + x)$;
- 12) $-5d \cdot (-d - 1)$.



qr.orioncentr.com.ua/M15Px

389°. Знайдіть добуток:

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| 1) $m \cdot (m + n)$; | 4) $3m \cdot (m - m^2)$; |
| 2) $10 \cdot (5x - 4)$; | 5) $(mn + m^2) \cdot 2nm$; |
| 3) $-8 \cdot (d - 2)$; | 6) $k \cdot (k^2 + k)$. |

390°. Перетворіть вираз у многочлен та спростіть його:

- 1) $3a \cdot (a - a^2) + (a^2 + a) \cdot 3a$;
- 2) $(a + b) \cdot (-2a) + a(b - a)$;
- 3) $10x \cdot (x + 3y) - 2xy \cdot (x - 4)$;
- 4) $2 \cdot (3a^2 + 2a + 4) - (-2a + 3) \cdot a$.

391°. Перетворіть вираз у многочлен та спростіть його:

- 1) $a \cdot (a + 3) + (8 - a) \cdot 4a$;
- 2) $10x \cdot (x + y) - 5y \cdot (2x - 4y)$;
- 3) $2a \cdot (a^2 + 2a + 4) - a^2 \cdot (2a + 4)$.

392°. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2(4 - x) + 3(2x - 8) = 0$;
- 2) $5(1 + 6x) - 3(8x - 1) = 0$;
- 3) $x(x - 4) - x^2 + 8 = 0$;
- 4) $x(x - 8) + 5x(x - 1) - 6x^2 = 26$.

393°. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2(4x - 1) + 3(2 - x) + 6 = 0$;
- 2) $20x(1 - 2x) + 5x(8x + 1) = 0$.

394°. Знайдіть добуток двочленів:

- 1) $(y + x) \cdot (-x - y)$;
- 2) $(y + x) \cdot (x + y)$;
- 3) $(y + x) \cdot (-x + y)$;
- 4) $(-y + x) \cdot (x - y)$;
- 5) $(2 + x) \cdot (2x + 1)$;
- 6) $(x + 3) \cdot (x + 9)$;
- 7) $(-2x + 4xy) \cdot (-x + xy)$;
- 8) $(-xy + y^2) \cdot (2 - xy)$;
- 9) $(x^2 + 3y^2) \cdot (x^2 + 2y^2)$;
- 10) $(2x^3 + x) \cdot (x^5 - 4)$;
- 11) $\left(\frac{1}{2}m + 0,5n\right) \cdot (m^2 - 2n)$;
- 12) $\left(-\frac{5}{2}k + s\right) \cdot \left(\frac{1}{2}s - 2\right)$.


qr.orioncentr.com.ua/ypTfl
395°. Виконайте множення:

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------------|
| 1) $(n + m) \cdot (n + m)$; | 4) $(2x + 1) \cdot (3x - 4)$; |
| 2) $(8 + x) \cdot (x - 5)$; | 5) $(2a + x) \cdot (2x + a)$; |
| 3) $(x + 4) \cdot (-x + 6)$; | 6) $(x^2 + 5y^2) \cdot (y^2 - x^2)$. |

396°. Знайдіть квадрат двочлена:

- | | |
|-------------------|--------------------|
| 1) $(a + 2)^2$; | 3) $(b^2 + 1)^2$; |
| 2) $(2a - c)^2$; | 4) $(-x - 2)^2$. |

397°. Знайдіть квадрат двочлена:

- | | | |
|------------------|------------------|--------------------|
| 1) $(x + 4)^2$; | 2) $(x - y)^2$; | 3) $(x^2 + 2)^2$. |
|------------------|------------------|--------------------|

398°. Виконайте множення многочленів:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1) $(x^4 + x^2 + 2)(x^2 + 12)$; | 2) $(x^4 - x^2 - 2)(x^2 - 12)$; |
|----------------------------------|----------------------------------|

3) $(a + b + 2)(a - b)$;

5) $(k^2 - k + 1)(k^4 - 3)$;

4) $(a - b - 2)(a + b)$;

6) $(k^2 + k - 1)(k^4 + 3)$.

399°. Виконайте множення многочленів:

1) $(m^4 + m^2 + 1) \cdot (m^2 - 1)$;

2) $(a - b - 1) \cdot (a + b)$;

3) $(x^2 - 3x + 4) \cdot (x - 5)$.

400°. Обчисліть значення виразу:

1) $(a + 2)(a^2 - 2a - 4) - a^3$, якщо $a = -1,4$;

2) $\left(\frac{1}{2}b + 3\right)(5b - 1) - 2,5b^2$, якщо $b = 0,5$;

3) $0,4(1 + x) + 0,3(x + 2) - 1$, якщо $x = -10$;

4) $(-1 + 3x)(x - 5) - (x - 2) \cdot 3x - 8$, якщо $x = 2,03$.

401°. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + (2 - x)(x + 1) = 0$;

2) $x^2 + (4 - x)(x - 1) = 0$;

3) $(5 - x)(x + 6) + x(x - 8) = 0$;

4) $(x + 1)(x - 1) + (9 - x)(x - 2) = 0$;

5) $(4 - x)(4x - 3) + (1 + 2x)(2x - 1) = 0$;

6) $(x - 5)(x - 2) - (x + 1)(x + 8) = 0$;

7) $(x - 1)(x + 1) - (x - 3)(x - 2) = 0$;

8) $(x - 3)(x - 4) = (x - 8)(x - 1)$.

402°. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + (3 - x)(x - 6) = 0$;

2) $(1 - x)(x + 1) + x(x - 6) = 0$;

3) $2x(x + 5) - (2x - 8)(x + 10) = 0$;

4) $(x + 2)(x - 4) + (3 - x)(x - 5) = 6$;

5) $(x - 1)(x - 6) = (x - 2)(x - 5)$.

403. Виконайте множення:

1) $10x \cdot (7y - x) \cdot 2$;

3) $-3 \cdot (2k^2 + 5k - 3) \cdot k$;

2) $y \cdot (x - 2y^2) \cdot y$;

4) $b \cdot (a^2 + b^2) \cdot a$.

404. Виконайте множення:

1) $xy \cdot (x - 2) \cdot 5$;

2) $3a \cdot (4 - a) \cdot (-2)$;

3) $xy \cdot (xy - 1) \cdot xy$.

405. Спростіть вираз:

- 1) $x^2y(xy^2 + xy) - (1 + y)x^3y^3$;
- 2) $0,3abc(2ab + c) + (-b^2a^2 - 0,7acb)0,6c$;
- 3) $xyz(x^2y^2 - z^2) + x^3(-zy^3 + z^2) - z^3(-xy + 2)$.

406. Спростіть вираз:

- 1) $a^2(a^2 + 1) - a^4(a^4 + 1) + a^8(a^8 + 1) - a^{16}(a^{16} + 1)$;
- 2) $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)$.

407. Обчисліть значення виразу:

- 1) $((x^3 + 1)x + 1)x + 1 - x^5$, якщо $x = 1,3$;
- 2) $(2x^2 + 4x + 3)(x + 2) - (2x^2 + 6)(x + 1)$, якщо $x = -\frac{5}{6}$.

408. Обчисліть значення виразу $((x^2 + 2)x - 3)x - x^4$, якщо $x = 1,5$.

409. Спростіть вираз:

- 1) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x + y)(x^2 - xy + y^2)$;
- 2) $(2b + a)(4b^2 + a^2 + 4ab)$;
- 3) $(0,2x + y)(\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{5}xy + y^2)$;
- 4) $(2abc - 4b^2c^2 + 5ac)(6cb + 3a^2)$;
- 5) $(x^2 + 4x + 2x^3 + 3)(x + 2) - 2(x^3 + 1)(x + 2)$.

410. Спростіть вираз:

- 1) $(a - 1)(a^2 + a + 1) - (a + 1)(a^2 - a + 1)$;
- 2) $\left(\frac{1}{2}b - 2a^2\right)(0,25b^2 + 2a^4 + a^2b)$;
- 3) $(x - y)(x + y) + (y + x)(-x - y)$.

411. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- 1) $(b^2 - 2b)b + 2b(b - 1) - (b^2 + b)(b + 1)$, якщо $b = -1,5$;
- 2) $(c^3 + 10)c - (c^2 + 10)(c^2 + 50) + 60c(c + 1)$, якщо $c = 0,5$.

412. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- 1) $(x + 4)(x + 3) - (x - 4)(x - 3) - 2x$, якщо $x = -0,02$;
- 2) $3(x - 2)^2 + 0,5x(2x + 4) - (2x)^2$, якщо $x = -1,01$.

413. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x + 1)(x + 5) + (0,5x - 1)6x = 4(1 + x^2)$;
- 2) $(x - 1)(2x - 1)x + (1 - 2x)(x - 1) = 2x - 1$;
- 3) $(x + 6)^2 = (x - 2)^2$.

414. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення x :

- 1) $(1 + x)(x + 9) - (3 + x)(x + 7)$;
- 2) $(4 + x)(x - 7) - x(x - 3)$;

- 3) $(2x - 1)(3x + 2) - (2 + 6x)\left(x - \frac{1}{6}\right)$.

415. Доведіть, що вираз набуває додатних значень за будь-якого значення m :

- 1) $2m(m^3 + 3m - 2) + 2(2m + 1)$;
- 2) $(2 + m)^2 - 4(m - 2) + m^2$.

416. Доведіть, що вираз $(4 + 5m)(3m - 1) - 7(m - 4)$ набуває додатних значень за будь-якого значення m .

417*. Перетворіть вираз у многочлен та спростіть його:

- 1) $(-a^2 + 3b^2)(-3b^2 - a^2) - (a^2 + 4)^2 + (2b + 8)(4,5b^3 + 2)$;
- 2) $(0,25a^2b^3 + 0,2a - ba)(4a + b^2a^2) - \frac{1}{4}ba^2(-16 + b^4a^2)$;
- 3) $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$;
- 4) $(a + b + c)(a + b - c) - (b + a)^2$.

418*. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- 1) $(x - 2)(5 - x)^2 - x^2(x - 12) + 5$, якщо $x = -0,2$;
- 2) $\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)(x + 1) - x^2\left(x + \frac{1}{2}\right)$, якщо $x = 0,012$.

419*. Спростіть вираз:

- 1) $x^{n+1}(x^{2n-1} + 1) - (x^{n+1} + 1)^2 + x^n(-x^{2n} + x)$;
- 2) $a^{n+2} - a(b^{n+1} + a^{n+1}) - b^{2n}(a^2b \cdot b^2a - (ab)^3)$.

420*. Доведіть тотожність:

- 1) $(a - 1)(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) = a^6 - 1$;
- 2) $(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) = a^5 + 1$;
- 3) $(a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) = a^n - 1$.

421*. Обчисліть $(x - 1)(x - 2)\dots(x - 100)$, якщо $x = 87$.

- 422*.** Помноживши двоцифрове число на суму його цифр, отримали 814. Знайдіть це число.
- 423*.** Якщо між цифрами двоцифрового числа вписати це саме число, то отримане число буде більшим за дане в 77 разів. Знайдіть це число.
- 424*.** Знайдіть усі числа $\overline{abc}$, якщо $0,1\overline{ab} \cdot c = c + a + b$.
- 425*.** Знайдіть найменше шестицифрове число, яке зменшується у три рази при перенесенні останньої цифри, що дорівнює 1, на перше місце.
- 426*.** Знайдіть цілі значення a, b, c , за яких для будь-якого x є правильною рівність $ax^2(x+1) + b(x^2+1) \times (x-6) + cx(x^2+1) = 5x + x^2 + 6$.

Проявіть компетентність



- 427.** Площа ділянки прямокутної форми дорівнює 100 м^2 . Якщо кожную її сторону збільшити на 5 м, то площа ділянки збільшиться на 170 м^2 . Знайдіть довжину огорожі початкової ділянки.



- 428.** Стіл у x разів дешевший від шафи, а стілець — у x разів дешевший від стола. Скільки гривень заплатили за 16 стільців, 3 столи і 2 шафи, якщо стілець коштує a грн?

§ 11. КВАДРАТ ДВОЧЛЕНА

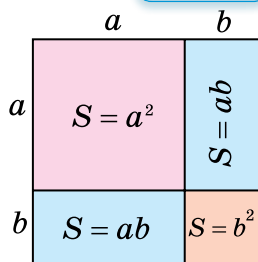
qr.orioncentr.com.ua/xvoOH



1. Квадрат суми. Квадрат різниці

Ситуація. Кожну сторону a квадрата збільшили на b . Для знаходження площі отриманого квадрата Марічка вирішила обчислити суму площ його частин так, як показано на малюнку 9, і записала:

$$\begin{aligned} S &= (a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab = \\ &= a^2 + b^2 + 2ab. \end{aligned}$$



Мал. 9



Чи правильно міркувала Марічка?

Так.



Проведіть цей дослід самостійно.

Запам'ятайте!

Квадрат $\frac{\text{суми}}{\text{різниці}}$ двох
одночленів дорівнює
сумі квадратів цих одночленів
 $\frac{\text{та їх}}{\text{без їх}}$ подвоєного добутку.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Наведені тотожності називаються *формулами скороченого множення*. Вони можуть трапитись вам і в такому вигляді:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Формули квадрата суми і квадрата різниці двох одночленів є тотожностями, тому їх можна застосовувати й у зворотному порядку:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

2. Повний квадрат двочлена

Тричлен $a^2 + 2ab + b^2$ називають *повним квадратом двочлена*, оскільки його можна згорнути у квадрат двочлена $(a + b)^2$.

Тричлен $a^2 - 2ab + b^2$ теж є повним квадратом двочлена і його можна згорнути у квадрат двочлена $(a - b)^2$.



qr.orioncentr.com.ua/qnmjv

Разом повний квадрат суми/різниці двочлена можна подати так:

$$a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Задача Спростіть вираз $(a + b)^2 - ab$.

Розв'язання

Запишемо даний вираз: $(a + b)^2 - ab =$

Розгорнемо квадрат суми: $= a^2 + 2ab + b^2 - ab =$

Зведемо подібні доданки: $= a^2 + ab + b^2.$

Тричлен $a^2 + ab + b^2$ називають *неповним квадратом суми*.

Тричлен $a^2 - ab + b^2$ називають *неповним квадратом різниці*.



Повний квадрат можна згорнути у квадрат двочлена.

Неповний квадрат **не можна** згорнути у квадрат двочлена.

Дізнайтеся більше

До формул скороченого множення відносять ще дві формули — куба суми двох одночленів та куба різниці двох одночленів.

Формулу куба суми двох одночленів можна одержати, подавши куб двочлена як добуток однакових множників та розгорнувши цей добуток у многочлен:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Формули куба суми та куба різниці:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/mNfq5

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
квадрат суми	square of sum	Quadrat einer Summe	carré d'une somme

Пригадайте головне

1. Які тотожності називають формулами скороченого множення?
2. Запишіть формули для обчислення квадрата суми двох одночленів та квадрата різниці двох одночленів.
3. Який вираз називають повним квадратом суми двох одночленів?
4. Чи можна згорнути повний квадрат суми двох одночленів у квадрат двочлена? А неповний квадрат?

Усне тренування

1. Обчисліть:

1) $5^3 + 5^2$; 2) $5^3 - 5^2$; 3) $5^2 - 5^3$; 4) $5^3 : 5^2$.

2. Обчисліть:

1) $(9 \cdot 0,3)^3 : 9^3$; 3) $(4 \cdot 35)^4 : (7 \cdot 20)^4$;
2) $(27 \cdot 0,1)^2 : 9^2$; 4) $(88 \cdot 9)^6 : (11 \cdot 72)^6$.

3. Обчисліть:

1) $10^{18} : 10 : 10^{15}$; 3) $(10^4)^2 \cdot 10^7 : 10^{13}$;
2) $10^{20} \cdot 10^5 : 10^{24}$; 4) $(4^5)^3 : (4^3)^5 \cdot 4^2$.

Розв'яжіть задачі

429'. Чи правильно, що:

1) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$; 2) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab$?

430'. Укажіть правильну формулу:

1) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$; 3) $(a - b)^2 = a^2 - ab + b^2$;
2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; 4) $(a - b)^2 = a^2 - ab - b^2$.

431'. Чи правильно, що $(x - 3)^2$ дорівнює:

1) $x^2 + 9 - 3x$;
2) $x^2 + 9 - 6x$?

432'. Піднесіть до квадрата суму:



1) $y + a$; 5) $x + 4$;
2) $x + m$; 6) $a + 8$;
3) $a + c$; 7) $1 + y$;
4) $c + x$; 8) $10 + c$.

qr.orioncentr.com.ua/tcxof

433'. Піднесіть до квадрата суму:

1) $y + c$; 2) $a + 9$; 3) $x + 7$; 4) $2 + m$.

434°. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб утворилась тотожність:

- 1) $(2a + 3b)^2 = * + 12ab + 9b^2$;
- 2) $(* + 6b)^2 = a^2 + 12ab + 36b^2$;
- 3) $(* + 8d)^2 = 16c^2 + 64cd + 64d^2$;
- 4) $(4c + 5d)^2 = 16c^2 + 40cd + *$.

435°. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб утворилась тотожність:

- 1) $(a + 5b)^2 = * + 10ab + 25b^2$;
- 2) $(2c + 9d)^2 = 4c^2 + 36cd + *$.

436°. Піднесіть до квадрата суму:

- 1) $3x + 1$; 3) $4 + 5y$; 5) $x + 0,4y$; 7) $10m + 3n$;
- 2) $6a + 3$; 4) $5 + 12x$; 6) $7x + y$; 8) $0,5b + 1,2c$.

437°. Піднесіть до квадрата суму:

- 1) $2a + 3$; 3) $4y + x$;
- 2) $2 + 3c$; 4) $2m + 5n$.

438°. Подайте вираз у вигляді многочлена:

- 1) $(x + 3y)^2$; 3) $(3a + 2c)^2$; 5) $(8y + 0,5a)^2$;
- 2) $(5a + b)^2$; 4) $(9b + 5a)^2$; 6) $(0,3y + 0,4x)^2$.

439°. Подайте вираз у вигляді многочлена:

- 1) $(3x + y)^2$; 3) $(2a + 3c)^2$;
- 2) $(a + 5b)^2$; 4) $(5b + 0,9a)^2$.

440°. Спростіть вираз:

- 1) $(5 + b)^2 - 10b$; 3) $(5 + 7y)^2 - 35b$;
- 2) $(4 + 2b)^2 + 16b$; 4) $(5x + 1)^2 - 5x$.

441°. Спростіть вираз:

- 1) $(4 + b)^2 - 4b(b + 2)$; 2) $(6 + y)^2 - y(y - 6)$.

442°. Піднесіть до квадрата різницю:

- 1) $y - a$; 4) $c - x$; 7) $1 - y$; 10) $3 - a$;
- 2) $x - m$; 5) $x - 4$; 8) $10 - c$; 11) $a - 11$;
- 3) $a - c$; 6) $a - 8$; 9) $a - 3$; 12) $n - 12$.

443°. Піднесіть до квадрата різницю:

- 1) $y - c$; 2) $a - 9$; 3) $x - 7$; 4) $2 - m$.

444°. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб утворилась тотожність:

- 1) $(3a - b)^2 = 9a^2 - * + b^2$;
- 2) $(3a - *)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$;
- 3) $(6d - 4c)^2 = 36d^2 - * + 16c^2$;
- 4) $(* - 4c)^2 = 9d^2 - 24cd + 16c^2$.

445°. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб утворилась тотожність:

- 1) $(* - b)^2 = 64a^2 - 16ab + b^2$;
- 2) $(2d - *)^2 = 4d^2 - 28cd + 49c^2$.

446°. Піднесіть до квадрата різницю:



- 1) $2 - 3x$; 5) $m - 0,2n$;
- 2) $6b - 5$; 6) $0,5x - 0,4y$;
- 3) $7y - 1$; 7) $10m - 3n$;
- 4) $8 - 3x$; 8) $0,5b - 1,2c$.



qr.orioncentr.com.ua/sf3Pd

447°. Піднесіть до квадрата різницю:

- 1) $2a - 3$; 2) $2 - 3c$; 3) $4y - x$; 4) $2m - 5n$.

448°. Подайте вираз у вигляді многочлена:

- 1) $(4x - 3)^2$; 3) $(4m - n)^2$; 5) $(a - 0,5b)^2$;
- 2) $(b - 10c)^2$; 4) $(3x - 2y)^2$; 6) $(0,4a - 6c)^2$.

449°. Подайте вираз у вигляді многочлена:

- 1) $(3x - y)^2$; 2) $(a - 5b)^2$; 3) $(2a - 3c)^2$.

450°. Спростіть вираз:

- 1) $(5 - b)^2 - 25$; 3) $(3 - 2a)^2 - 3(3 - 2a)$;
- 2) $(4 - 2b)^2 + 16b$; 4) $(1 - 6y)^2 + (2x - 3)^2$.

451°. Спростіть вираз:

- 1) $(6 - y)^2 - y^2$; 2) $(8x - 1)^2 - (4 - 2x)^2$.

452°. Який із наступних виразів можна згорнути у квадрат двочлена:

- 1) $x^2 + 2xy - y^2$; 2) $x^2 + xy + y^2$?

453°. Згорніть у квадрат суми чи різниці двох одночленів:

- 1) $3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4$; 3) $6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5$;
- 2) $3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4$; 4) $6^2 + 5^2 + 2 \cdot 6 \cdot 5$.

454°. Даний тричлен згорніть у квадрат суми двох одночленів:



qr.orioncentr.com.ua/wJEzZ

- 1) $1 + 4a + 4a^2$;
- 2) $4 + 12a + 9a^2$;
- 3) $b^2 + 10b + 25$;
- 4) $b^2 + 8b + 16$.

455°. Даний тричлен згорніть у квадрат різниці:

- 1) $9 - 6a + a^2$;
- 2) $49 - 14a + a^2$;
- 3) $4b^2 - 20b + 25$;
- 4) $9b^2 - 24b + 16$.

456°. Даний тричлен згорніть у квадрат двочлена:

- 1) $4 + 4x + x^2$;
- 2) $81 - 18y + y^2$;
- 3) $36b^2 + 24b + 4$;
- 4) $64c^2 - 80c + 25$.

457°. Використавши формулу квадрата суми, обчисліть:

- 1) 51^2 ;
- 2) 62^2 ;
- 3) 83^2 ;
- 4) 111^2 .

458°. Використавши формулу квадрата різниці, обчисліть:

- 1) 39^2 ;
- 2) 59^2 ;
- 3) 18^2 ;
- 4) 97^2 .

459°. Використавши формули квадрата суми та квадрата різниці, обчисліть:

- 1) 28^2 ;
- 2) 42^2 ;
- 3) 99^2 ;
- 4) 63^2 .

460°. Спростіть вираз:

- 1) $(0,5 + b)^2 - b(b + 1)$;
- 2) $(0,3 - 0,2a)^2 - 0,9(1 - 0,2a)$;
- 3) $(0,1 + y)^2 - 0,2(y + 0,05)$;
- 4) $(0,5x + 10)^2 - 2x(5 + 0,125x)$.

461°. Спростіть вираз:

- 1) $(0,3 + x)^2 - x(x + 0,6)$;
- 2) $(0,5x - 0,1)^2 - 0,1(0,1 - x)$.

462°. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(3 + x)^2 - x^2 = 0$;
- 2) $(2x - 1)^2 - 4x^2 = 0$;
- 3) $x^2 - (5 - x)^2 = 0$;
- 4) $(4x - 1)^2 - 4x(4x + 1) = 1$;
- 5) $(5 + x)^2 - x(x + 5) = 0$.

463°. Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) (4 + x)^2 = x^2; & 3) (6 + x)^2 - x(x + 12) = 0; \\ 2) (3x - 2)^2 = 9x^2; & 4) (7 - 3x)^2 = 3x(3x - 14). \end{array}$$

464. Подайте у вигляді многочлена вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) (-x + 2y)^2; & 4) (7(y - 4x))^2; \\ 2) (-3y - 4x)^2; & 5) (-3y^3 - 4x^2)^2; \\ 3) (3(x + 5y))^2; & 6) (-5a^3b^2 + 6b^3)^2. \end{array}$$

465. Піднесіть до квадрата вираз:

$$1) -5a - 6b; \quad 2) 3(x + 5y); \quad 3) 10x^2 + 2y^2.$$

466. Подайте у вигляді многочлена вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) 5x(-0,2x + y)^2; & 4) 10y^3(x + 0,01y)^2; \\ 2) 4y^2(-5y^2 + 4x^2)^2; & 5) (-a - b)^2(2a + 3b); \\ 3) 6ab(-a + 3b)^2; & 6) (-5c + d)(c - d)^2. \end{array}$$

467. Спростіть вираз:

$$1) 10x(-0,1x + 1)^2; \quad 2) (-3c - d)(c + d)^2.$$

468. Доведіть тотожність:

$$\begin{array}{l} 1) (x + y)^2 = (-x - y)^2; \\ 2) (a + b)^2 + (-a + b)^2 = 2a^2 + 2b^2; \\ 3) (2x + 4y)^2 = 4(-x - 2y)^2; \\ 4) (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2. \end{array}$$

469. Згорніть у квадрат двох одночленів:

$$\begin{array}{l} 1) 0,25b^4 + ab^2 + a^2; \\ 2) 1,21 + 2,2ab + b^2a^2; \\ 3) (a + 1)^2 + 10(a + 1) + 25; \\ 4) (a + 2)^2 + 2a^2 - 4 + 2a + (a - 1)^2. \end{array}$$

470. Згорніть у квадрат двох одночленів:

$$\begin{array}{l} 1) 0,16x^4 + 1,2x^2y^3 + 2,25y^6; \\ 2) (x + 3)^2 + 2(x + 3) + 1. \end{array}$$

471. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

$$\begin{array}{l} 1) (10 + x)(-0,01x + 1) + (1 + 0,1x)^2, \text{ якщо } x = 5; \\ 2) (4x + 1)^2 + 2x(-4 - 8x), \text{ якщо } x = 24. \end{array}$$

472. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

$$(0,5 + 2x)^2 - (-0,5 + 2x)^2, \text{ якщо } x = 2,5.$$

473. Розв'яжіть рівняння:

1) $1 + 4x + 4x^2 = 0$;

2) $25 - 20x + 4x^2 = 0$;

3) $4 - 12x + 9x^2 = 0$;

4) $(1 + x)(2x - 1) = (x - 1)x - 2$;

5) $(3x + 3)(x - 2) = (2x + 1)(x + 6) - 76$.

474. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 10x + 25 = 0$;

2) $(7 + 2x)x + 111 = (x - 6)(x - 5)$.

475. Сторону квадрата зменшили на 3 см, при цьому його площа зменшилася на 27 см^2 . Знайдіть сторону початкового квадрата.

476. Периметр квадрата збільшили на 16 см, при цьому його площа збільшилася на 40 см^2 . Знайдіть сторону початкового квадрата.

477. Сторону квадрата збільшили на 7 см, при цьому його площа збільшилася на 231 см^2 . Знайдіть сторону початкового квадрата.

478*. Виведіть формулу квадрата тричлена $a + b + c$. Піднесіть до квадрата вираз:

1) $a + b + 2$;

2) $8x - 2y + 3$.

479*. Сторони трьох квадратів є послідовними натуральними числами. Різниця суми площ двох менших квадратів та площі третього квадрата дорівнює 12. Знайдіть сторони цих квадратів.

480*. Згорніть у квадрат суми одночленів:

1) $(x + 5)^2 + 6x + 40 + 2(x + 8)$;

2) $(2x + 3)^2 + 16xy + 24y + 16y^2$.

481*. Дано три послідовні непарні натуральні числа. Відомо, що квадрат їх суми більший за подвоєну суму квадратів цих чисел на 227. Знайдіть ці числа.

482*. Натуральне число при діленні на 9 дає в остачі 3. Доведіть, що квадрат цього числа ділиться на 9.

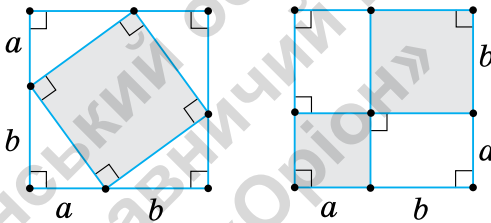
- 483*.** Деяке натуральне число при діленні на 5 дає в остачі 1, а інше натуральне число при діленні на 5 дає в остачі 2. Доведіть, що сума квадратів цих чисел ділиться на 5.

Проявіть компетентність



- 484.** Восени Марія Іванівна вирішила зменшити ділянку городу квадратної форми, на якій вона садила картоплю. Кожну сторону городу вона зменшила на 1 м, при цьому його площа зменшилася на 9 м^2 . Скільки картоплі потрібно приготувати Марії Іванівні навесні, якщо для засаджування 1 м^2 городу потрібно 4 кг картоплі?

- 485.** Чи є рівними площі незафарбованих частин першої і другої фігур на малюнку 10?



Мал. 10

§ 12. РІЗНИЦЯ КВАДРАТІВ

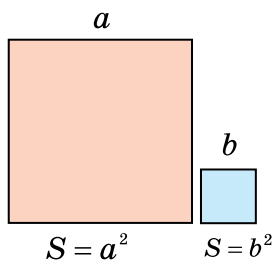
1. Добуток суми і різниці двох одночленів

Ситуація. Використавши площі двох квадратів a^2 і b^2 (мал. 11) та рівність площ фігур на малюнку 12, а (фігура без квадрата зі стороною b) і малюнку 12, б Євген вивів формулу площі прямокутника зі сторонами $a + b$ і $a - b$:

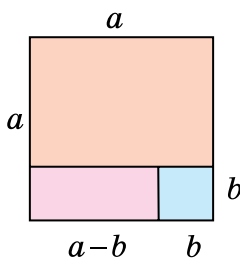


qr.orioncentr.com.ua/P8PEw

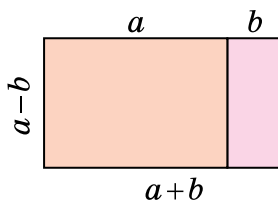
$$S = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$



Мал. 11



Мал. 12



б



Чи правильно міркував Євген?

Запам'ятайте!

Добуток суми і різниці двох одночленів дорівнює різниці їх квадратів.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Так.



Доведемо цю рівність:

$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 = \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Отже, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, що й вимагалось довести.

2. Формула різниці квадратів

qr.orioncentr.com.ua/D99Es



Чи можна застосовувати доведену вище рівність у зворотному порядку?



Так.



Ця рівність є тотожністю, тому її також можна застосовувати у вигляді:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Цю тотожність називають *формулою різниці квадратів*. Вона дозволяє замінювати різницю квадратів двох одночленів добутком їх суми й різниці.

Задача 1 Подайте у вигляді добутку двочлен $9x^6y^2 - 25$.

Розв'язання

Запишемо даний вираз: $9x^6y^2 - 25 =$
 Виділимо квадрати доданків: $= (3x^3y)^2 - 5^2 =$
 Застосуємо ФСМ: $= (3x^3y + 5)(3x^3y - 5).$

Задача 2 Знайдіть значення виразу $27^2 - 23^2$.

Розв'язання Застосуємо формулу різниці квадратів:

$$27^2 - 23^2 = (27 + 23) \cdot (27 - 23) = 50 \cdot 4 = 200.$$

Отже, $27^2 - 23^2 = 200$.



Формулу різниці квадратів можна застосовувати до будь-яких цілих виразів.

Дізнайтеся більше

1. Чи можна подати як добуток різницю n -х степенів двох одночленів? Виявляється, що так:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Скориставшись цією формулою, можна подати як добуток, наприклад, такий вираз: $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$

2. Степанець Олександр Іванович (1942–2007) — відомий український математик. Народився в селі Комарівка на Чернігівщині в родині сільського вчителя. З 1990 був завідувачем відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, а 1996 обійняв посаду заступника директора Інституту математики НАН України. У його науковому доробку — 200 наукових праць.



qr.orioncentr.com.ua/baSBv

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/T0IIP

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
різниця двох квадратів	difference of two squares	Differenz zweier Quadrate	la différence de deux carrés

Пригадайте головне

1. Поясніть, як знайти добуток суми і різниці двох одночленів.
2. Запишіть формулу різниці квадратів.

Усне тренування

1. Знайдіть значення виразу:

1) $3a + 4b$, якщо $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{7}{4}$;

2) $0,6c + 0,4c^2$, якщо $c = -5$.

2. Знайдіть значення подвоєного добутку чисел:

1) $3 \text{ і } 2$; 2) $12 \text{ і } 8$; 3) $0,7 \text{ і } 0,2$; 4) $9 \text{ і } \frac{1}{3}$.

3. Піднесіть до квадрата одночлен:

1) $2xy$; 2) $5a^2b^3c^6$; 3) $0,3x$; 4) $2,5a^4b^2$.

Розв'яжіть задачі

486'. Чи правильно, що $(x - 5)(x + 5)$ дорівнює:

1) $x^2 + 25$; 3) $x^2 - 5$;

2) $x^2 - 25$; 4) $x - 25$?

487'. Чи правильно, що:

1) $a^2 - b^2 = (a - b)(a - b)$;

2) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$?

488'. Чи правильно, що $a^2 - 16$ дорівнює:

1) $(a - 16)(a + 16)$; 3) $(a - 4)(a + 4)$;

2) $(a - 4)^2$; 4) $(a - 8)(a + 8)$?

489'. Подайте вираз у вигляді многочлена:



1) $(x + 3)(x - 3)$;

2) $(a + 2)(a - 2)$;

3) $(c + 5)(c - 5)$;

4) $(6 + x)(6 - x)$;

5) $(x + 11)(x - 11)$;

6) $(0,4 + x)(0,4 - x)$;

7) $(0,5 + x)(0,5 - x)$;

8) $(x + 0,15)(x - 0,15)$.



qr.orioncentr.com.ua/QFZ4v

490°. Подайте вираз у вигляді многочлена:

- | | |
|-----------------------|---|
| 1) $(x + 1)(x - 1)$; | 4) $(a + 10)(a - 10)$; |
| 2) $(m + 4)(m - 4)$; | 5) $(0,3 + x)(0,3 - x)$; |
| 3) $(x + 8)(x - 8)$; | 6) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$. |

491°. Подайте вираз у вигляді многочлена:

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| 1) $(x - 3y)(x + 3y)$; | 4) $(x - 6y)(x + 6y)$; |
| 2) $(a - 2b)(a + 2b)$; | 5) $(mn - 2)(mn + 2)$; |
| 3) $(c - 5d)(c + 5d)$; | 6) $(2ab - 4)(2ab + 4)$. |

492°. Подайте вираз у вигляді многочлена:

- 1) $(2 - 5x)(2 + 5x)$;
- 2) $(3b - 7d)(3b + 7d)$;
- 3) $(mn - 4)(mn + 4)$;
- 4) $(4xy - 1)(4xy + 1)$.

493°. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x + 8)(x - 8) = x^2 - x$;
- 2) $(x + 2)(x - 2) = -4$;
- 3) $(x + 9)(x - 9) = x^2$;
- 4) $(2x + 3)(2x - 3) = (x + 3)(4x - 3)$;
- 5) $(3x + 1)(3x - 1) = 9x^2 + x$;
- 6) $(6x + 1)(6x - 1) = (4x + 1)(9x - 1)$.

494°. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x + 6)(x - 6) = x^2 - 4x$;
- 2) $(x + 10)(x - 10) + 100 = 0$;
- 3) $(2x + 1)(2x - 1) = 4x^2$;
- 4) $(4x + 5)(4x - 5) = (2x + 1)(8x - 1)$.

495°. Подайте вираз у вигляді многочлена:

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$; | 5) $(x^2y - 8)(x^2y + 8)$; |
| 2) $(x^4 - y^4)(x^4 + y^4)$; | 6) $(ab^3 - c)(ab^3 + c)$; |
| 3) $(x^3 - y^6)(x^3 + y^6)$; | 7) $(a^2b^2 - c^2)(a^2b^2 + c^2)$; |
| 4) $(x^5 - y^8)(x^5 + y^8)$; | 8) $(a^{10}b^{20} - c^{30})(a^{10}b^{20} + c^{30})$. |

496°. Подайте вираз у вигляді многочлена:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $(x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$; | 3) $(x^8 - y^4)(x^8 + y^4)$; |
| 2) $(x^5 - y^5)(x^5 + y^5)$; | 4) $(a^6b^3 - c^2)(a^6b^3 + c^2)$. |

497°. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- 1) $(1 + 0,1x)(-0,1x + 1) - 1$, якщо $x = 10$;
- 2) $(x + 6)(x - 6) + x(5 - x)$, якщо $x = 2,04$.

498°. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб утворилась тотожність:

- 1) $4a^2b^2 - 25 = (* - 5)(* + 5)$;
- 2) $9a^2 - \frac{1}{9}c^2 = (3a - *)(3a + *)$.

499°. Подайте у вигляді добутку двочлен:



- 1) $x^2 - 16$;
- 2) $x^2 - 81$;
- 3) $4 - a^2$;
- 4) $a^2 - 9$;
- 5) $36 - n^2$;
- 6) $81m^2 - 4$;
- 7) $49y^2 - 9$;
- 8) $1,21 - m^2$.



qr.orioncentr.com.ua/Sx04w

500°. Подайте у вигляді добутку двочлен:

- 1) $a^2 - 25$;
- 2) $n^2 - 100$;
- 3) $64 - 49x^2$;
- 4) $y^2 - 2,25$.

501°. Подайте у вигляді добутку двочлен:

- 1) $x^4 - y^4$;
- 2) $x^8 - y^2$;
- 3) $a^{12} - c^{22}$;
- 4) $a^{200} - c^{20}$;
- 5) $36x^2 - y^6$;
- 6) $81a^6 - 4b^4$;
- 7) $49y^2 - 9x^8$;
- 8) $64p^2n^2 - 100m^{12}$.

502°. Подайте у вигляді добутку двочлен:

- 1) $a^6 - b^6$;
- 2) $x^{10} - y^4$;
- 3) $a^{66} - c^{100}$;
- 4) $p^2n^4 - m^8$.

503°. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 36 = 0$;
- 2) $x^2 - 64 = 0$;
- 3) $x^2 - 0,49 = 0$;
- 4) $x^2 - 121 = 0$;
- 5) $4x^2 - 81 = 0$;
- 6) $25x^2 = 49$.

504°. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 25 = 0$;
- 2) $x^2 - 400 = 0$;
- 3) $9x^2 = 4$;
- 4) $16 = 49x^2$.

505°. Чи правильно,
що $29^2 - 21^2 = \dots$



qr.orioncentr.com.ua/FzdtW



1) $(29 - 21)(29 - 21) = 8 \cdot 8 = 64$;

2) $(29 + 21)(29 - 21) = 50 \cdot 8 = 400$?

506°. Використавши формулу різниці квадратів, обчисліть:

1) $70^2 - 68^2$;

3) $63 \cdot 57$;

2) $1,01^2 - 0,99^2$;

4) $10,5 \cdot 9,5$.

507°. Використавши формулу різниці квадратів, обчисліть:

1) $25^2 - 24^2$;

3) $0,97 \cdot 1,03$;

2) $9,8^2 - 10,2^2$;

4) $503 \cdot 497$.

508°. Розкладіть на множники вираз:



1) $(5 + b)^2 - b^2$;

2) $(4 - b)^2 - 16$;

3) $y^2 - (7 + y)^2$;

4) $x^2 - (x + 1)^2$;

5) $(1 + x)^2 - (1 - x)^2$;

6) $(x + 2)^2 - (2 + x)^2$;

7) $(x + 6)^2 - (6 - x)^2$;

8) $(3x + 2)^2 - (5 - x)^2$.



qr.orioncentr.com.ua/llbcE

509°. Розкладіть на множники вираз:

1) $(4 + x)^2 - x^2$;

3) $(x + 3)^2 - (3 - x)^2$;

2) $(8 - x)^2 - 64$;

4) $(x + 2)^2 - (4 - x)^2$.

510. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $\left(\frac{1}{3}x - 2y\right)\left(\frac{1}{3}x + 2y\right)$;

2) $\left(\frac{1}{3} + 5ax^3\right)\left(5ax^3 - \frac{1}{3}\right)$;

3) $(-0,5xy + 2)(2 + 0,5xy)$;

4) $\left(5bc^4 - 1\frac{1}{5}\right)\left(1\frac{1}{5} + 5bc^4\right)$;

5) $(-x + 6y)(6y + x)$;

6) $(-0,1xy + 5)(5 + 0,1xy)$;

7) $(-a - 0,6bc)(a - 0,6bc)$;

8) $(-a^3x - ax^3)(a^3x - ax^3)$.

511. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $\left(2a - \frac{5}{6}b\right)\left(\frac{5}{6}b + 2a\right)$;

2) $(-3x + 8y)(8y + 3x)$;

3) $(-xy - 0,2ab)(xy - 0,2ab)$;

4) $(-y^5x^3 - 2)(2 - y^5x^3)$.

512. Виконайте множення двочленів:

1) $(a + 2b)(a - 2b)(a^2 + 4b^2)$;

2) $(2 + x)(2 - x)(4 + x^2)$;

3) $(x - y)(y + x)(y^2 + x^2)(y^4 + x^4)$;

4) $(1 - y^2)(y^2 + 1)(y^4 + 1)(y^8 + 1)$.

513. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(1 + x)(1 - x)(1 + x^2)(1 + x^4)$, якщо $x = 2$;

2) $(2a + 3b)(-2a + 3b)(4a^2 + 9b^2)$, якщо $a = 3$, $b = 2$.

514. Спростіть вирази:

1) $(3 + a)(3 - a)(a^2 + 9)$;

2) $(5 + bc)(5 - bc)(25 + b^2c^2)$;

3) $(1 - x)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$.

515. Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $(2x^2y^2 + xy)^2 - x^2y^2$; 3) $(0,2c^2d^4 + cd)^2 - 0,04c^4d^4$;

2) $\left(\frac{2}{3}a^2b^2 + 4\right)^2 - 16$; 4) $(5x^4 + 6y^2)^2 - 36y^4$.

516. Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $(a^2c^2 + 3ac)^2 - 9a^2c^2$; 2) $(0,6c^6 + d)^2 - 0,36c^{12}$.

517. Доведіть тотожність:

1) $(a + b)^2 - (-a - b)^2 = 0$;

2) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;

3) $(b - a)^2 - (b - a)(a + b) = 2a(a - b)$.

518. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 2)^2 - 36 = 0$;

4) $25x^2 - (7 - 5x)^2 = 14x$;

2) $(2x - 1)^2 - 4 = 0$;

5) $(4 + 3x)^2 - (6x - 2)^2 = 0$;

3) $x^2 - (6 + x)^2 = 9x$;

6) $(5x + 1)^2 - (4x + 5)^2 = 0$.

519. Розв'яжіть рівняння:

1) $16x^2 - (4 + 3x)^2 = 0$; 2) $(8 + 5x)^2 - (4x - 1)^2 = 0$.

520. Розв'яжіть рівняння:

1) $16 - (2 - 3x)^2 = 0$;

2) $(5 + 2x)^2 - x^2 = 0$;

3) $(8 + 5x)^2 - (4x - 1)^2 = 0$.

521. Доведіть, що:

1) $34^2 - 1$ ділиться на 11;

2) $53^2 - 4$ ділиться на 5;

3) $111^2 - 9$ ділиться на 12;

4) $77^2 - 49$ ділиться на 40.

522. Спростіть вираз:

1) $(a + b + c)(a + b - c)$;

2) $(a - b + c)(a + b - c)$;

3) $(x + y + 2)(x - y + 2)$;

4) $(xy + x^2 + y^2)(xy - x^2 - y^2)$.

523. Сторона одного квадрата на 4 см більша за сторону іншого, а різниця їх площ дорівнює 24 см^2 . Знайдіть периметри цих квадратів.

524. Периметр одного квадрата на 48 см більший за периметр іншого, а різниця їх площ дорівнює 288 см^2 . Знайдіть сторони цих квадратів.

525. Сторона одного квадрата на 6 см менша від сторони іншого, а різниця їх площ дорівнює 84 см^2 . Знайдіть відношення довжин сторін цих квадратів.

526*. Доведіть, що:

1) $99^2 + 20^2 = 101^2$; 3) $20^2 + 9^2 = 15^2 + 16^2$.

2) $112^2 + 15^2 = 113^2$;

527*. Доведіть, що квадрат непарного натурального числа при діленні на 8 дає в остачі 1.

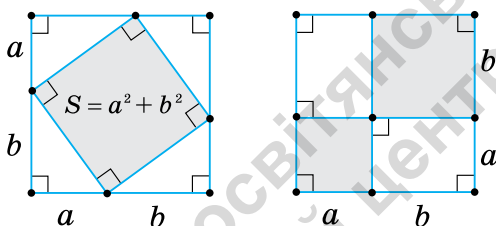
528*. Різниця квадратів двох двоцифрових натуральних чисел, записаних одними й тими самими цифрами, дорівнює 495. Знайдіть ці числа.

Проявіть компетентність



529. Тато вирішив переклеїти шпалери в дитячій кімнаті. Стіна з вікном має форму квадрата зі стороною 3,2 м, вікно також має форму квадрата зі стороною 1,3 м. Чи вистачить татові шпалер для поклейки цієї стіни, якщо він купив 2 рулони розміром 10 м х 0,53 м?

530. Чи є рівними площі зафарбованих частин першої і другої фігур на малюнку 13?



Мал. 13

§ 13. СУМА І РІЗНИЦЯ КУБІВ

1. Скорочене множення

Ситуація. Петро Іванович вирішив перевірити, як Назар і Галина виконують множення многочленів. Назар множив многочлени $(a + b)$ і $(a^2 - ab + b^2)$, а Галина — многочлени $(a - b)$ і $(a^2 + ab + b^2)$.

Учні зробили такі записи на дошці.



qr.orioncentr.com.ua/pXSmW

Назар

$$\begin{aligned} (a + b)(a^2 - ab + b^2) &= \\ = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 &= \\ = a^3 + b^3. \end{aligned}$$

Галина

$$\begin{aligned} (a - b)(a^2 + ab + b^2) &= \\ = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 &= \\ = a^3 - b^3. \end{aligned}$$

Проаналізуйте записи Назара й Галини.



Чи є тотожно рівними початковий і кінцевий вирази в записах Назара й Галини?



Так.

Маємо ще дві формули скороченого множення:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3;$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Ці формули можна застосовувати і в зворотному порядку.

Запам'ятайте!

$\frac{\text{Сума}}{\text{Різниця}}$ кубів двох

одночленів дорівнює добутку

$\frac{\text{суми}}{\text{різниці}}$ цих одночленів

і неповного квадрата

їх $\frac{\text{різниці}}{\text{суми}}$.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$



Чи відрізняються повний і неповний квадрати двочлена?



Так.

Повний квадрат

$$a^2 \pm 2ab + b^2$$

Неповний квадрат

$$a^2 \pm ab + b^2$$



Неповний квадрат **НЕ можна** згорнути у квадрат двочлена.

Задача 1

Подайте у вигляді многочлена вираз $(5m - 7)(25m^2 + 35m + 49)$.

Розв'язання

Запишемо даний вираз:

$$(5m - 7)(25m^2 + 35m + 49) =$$

З'ясуємо, чи є неповний квадрат:

$$= (5m - 7)((5m)^2 + (5m) \cdot 7 + 7^2) =$$

Застосуємо формулу різниці кубів:

$$= (5m)^3 - (7)^3 =$$

Спростимо вираз:

$$= 125m^3 - 343.$$

2. Розкладання многочлена на множники

qr.orioncentr.com.ua/NK7LW



Де ще застосовують формули суми й різниці кубів одночленів?

Для розкладання многочлена на множники.



Задача 2 Подайте у вигляді добутку двочлен $8 + x^3y^6$.

Розв'язання

Запишемо даний вираз:

$$8 + x^3y^6 =$$

Виділимо куби доданків:

$$= 2^3 + (xy^2)^3 =$$

Застосуємо формулу суми кубів:

$$= (2 + xy^2)(2^2 - 2xy^2 + (xy^2)^2) =$$

Спростимо вираз у других дужках:

$$= (2 + xy^2)(4 - 2xy^2 + x^2y^4).$$



Формули суми кубів і різниці кубів можна застосовувати до будь-яких цілих виразів.

Дізнайтеся більше

Натуральні числа мають багато цікавих властивостей. Проте довести їх буває складніше, ніж виявити. Розглянемо приклад.

Дільниками числа 6 є числа 1, 2, 3, 6. Для кожного із цих чисел визначимо кількість їхніх дільників. А саме: число 1 має один дільник, число 2 — два дільники, число 3 — два дільники, число 6 — чотири дільники. Отже, одержали набір чисел: 1, 2, 2, 4. Виявляється, що сума кубів цих чисел дорівнює квадрату їх суми, тобто: $1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = (1 + 2 + 2 + 4)^2$.

Справді:

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = 1 + 8 + 8 + 64 = 81;$$

$$(1 + 2 + 2 + 4)^2 = 9^2 = 81.$$

Щоб перевірити цю властивість ще раз, візьмемо число 16. Його дільники — 1, 2, 4, 8, 16. Знайшовши кількість дільників кожного із цих чисел, одержимо набір чисел: 1, 2, 3, 4, 5. Складемо відповідні числові вирази:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225;$$

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 15^2 = 225.$$

Отже, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$.

Проте довести такий факт досить складно. Спробуйте. Можливо, ви зможете це зробити.

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/T5bir

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
сума кубів	sum of cubes	Summe von Kuben	somme des cubes

Пригадайте головне

1. Запишіть формулу суми кубів.
2. Запишіть формулу різниці кубів.
3. Чому дорівнює сума кубів двох одночленів?
4. Чому дорівнює різниця кубів двох одночленів?
5. Як довести формулу суми кубів?
6. Як довести формулу різниці кубів?

Усне тренування

1) Обчисліть:

$$7^2; 0,8^2; \left(-\frac{1}{4}\right)^2; 1,1^2; -\left(\frac{1}{6}\right)^2; 2^3; (-3)^3; 4^3; \left(-\frac{1}{5}\right)^3; 0,6^3.$$

2) Подайте даний вираз у вигляді куба деякого виразу:
 $-0,001x^3$; $125y^3$; $8x^6$; $0,064x^9$; $-27x^{15}y^{12}$.

Розв'яжіть задачі

531'. Чи правильно, що:

- 1) $(a + b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + b^3$;
- 2) $(a + b)(a^2 - 2ab + b^2) = a^3 + b^3$;
- 3) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$;
- 4) $(a - b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$?

532'. Чи правильно, що:

- 1) $(a + b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$;
- 2) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$;
- 3) $(a - b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 - b^3$;
- 4) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - b^3$?

533'. Укажіть правильну рівність:

- 1) $a^3 - b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$;
- 2) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
- 3) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + 2ab + b^2)$;
- 4) $a^3 - b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

534'. Укажіть правильну рівність:

- 1) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
- 2) $a^3 + b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
- 3) $a^3 + b^3 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$;
- 4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$.

535°. Чи правильно, що $(a + 2)(a^2 - 2a + 4)$ дорівнює:

- 1) $a^2 + 4$;
- 2) $a^3 + 4$;
- 3) $a^3 - 8$;
- 4) $a^3 + 8$?

536°. Чи правильно, що $(t - 3)(t^2 + 3t + 9)$ дорівнює:

- 1) $t^2 + 27$;
- 2) $t^3 + 9$;
- 3) $t^3 + 27$;
- 4) $t^3 - 27$?

537°. Подайте добуток у вигляді многочлена:



- 1) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$;
- 2) $(2 + 3d)(4 - 6d + 9d^2)$;
- 3) $(m - n)(m^2 + mn + n^2)$;
- 4) $(1 - 5b)(1 + 5b + 25b^2)$;
- 5) $(2 - t)(4 + 2t + t^2)$.



qr.orioncentr.com.ua/2WO9D

538°. Подайте добуток у вигляді многочлена:

- 1) $(b + c)(b^2 - bc + c^2)$;
- 2) $(a - x)(a^2 + ax + x^2)$;
- 3) $(c + 2d)(c^2 - 2cd + 4d^2)$;
- 4) $(x - 3m)(x^2 + 3mx + 9m^2)$;
- 5) $(4a + n)(16a^2 - 4an + n^2)$;
- 6) $(9m - t)(81m^2 + 9mt + t^2)$;
- 7) $(5c + 2)(25c^2 - 10c + 4)$;
- 8) $(7x - 3)(49x^2 + 21x + 9)$.

539°. Подайте добуток у вигляді многочлена:

- 1) $(a - n)(a^2 + an + n^2)$;
- 2) $(m + t)(m^2 - mt + t^2)$;
- 3) $(4yt - x)(16y^2t^2 + 4xyt + x^2)$.

540°. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб утворилася тотожність:

- 1) $(2a + 4b)(4a^2 - 8ab + 16b^2) = * + 64b^3$;
- 2) $(5x - 3b)(25x^2 + 15bx + 9b^2) = 125x^3 - *$;
- 3) $(-2x + 6y)(36y^2 + 12xy + 4x^2) = * - 8x^3$.

541°. Спростіть вираз:

- 1) $(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1) - 8a^3$;
- 2) $(3 - b)(b^2 + 3b + 9) + b^3$;
- 3) $a^3 - (a - 0,1c)(a^2 + 0,1ac + 0,01c^2)$;
- 4) $64 - (cd + 4)(c^2d^2 - 4cd + 16)$;
- 5) $125x^3 - (5x - 2)(25x^2 + 10x + 4) - 8x$.

542°. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(1 + x)(x^2 - x + 1) - x^3 = x$;
- 2) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 8x^3 + x = 2$;
- 3) $x^3 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 3x = 0$.

543°. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(1 - x)(1 + x + x^2) + x^3 - x = 0$;
- 2) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) - 27x^3 + 2x = 3$.

544°. Подайте вираз у вигляді добутку:



- 1) $a^3 - 8$;
- 2) $1 - 27y^3$;
- 3) $64c^3 - d^6$.

qr.orioncentr.com.ua/0OegQ



545°. Розкладіть на множники двочлен:

- 1) $x^3 - 8$;
- 2) $27 - d^3$;
- 3) $a^6 + b^3$;
- 4) $m^3 + n^{12}$;
- 5) $c^{15} - 125d^3$;
- 6) $729x^6 + y^9$;
- 7) $k^{21} - 216p^{24}$;
- 8) $343p^{33} + 0,125q^3$;
- 9) $-0,001a^3 + b^6$;
- 10) $-0,008a^3 - a^9$;
- 11) $-0,064a^3 + a^6$;
- 12) $-0,027c^3 - 0,343a^9$.

546°. Розкладіть на множники двочлен:

- 1) $x^3 - 64$;
- 2) $125 + a^3$;
- 3) $1000y^3 - x^3$;
- 4) $0,216p^3 + q^6$;
- 5) $-m^3 + 0,001n^9$;
- 6) $-0,027x^6 - 8y^3$.

547°. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб утворилася тотожність:

- 1) $* - 27b^3 = (4a - 3b)(16a^2 + 12ab + 9b^2)$;
- 2) $0,125y^3 - * = (0,5y - 0,3b)(0,25y^2 + 0,15yb + 0,09b^2)$;
- 3) $* - x^3 = (-x + 6y)(36y^2 + 6xy + x^2)$.

548°. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб утворилася тотожність:

$$27a^3 - 0,001c^3 = (3a - *)(9a^2 + 0,3ac + 0,01c^2).$$

549°. Подайте двочлен у вигляді добутку двох виразів:

- 1) $216x^3y^9 - 0,125$;
- 2) $27a^6 - 0,064b^{12}$;
- 3) $343c^3 - 0,125a^{18}$;
- 4) $64m^3 - 1000n^{12}$;
- 5) $0,001x^3 + 0,008$;
- 6) $0,216 + y^6x^6$.

550°. Подайте двочлен у вигляді добутку двох виразів:

- 1) $1000 - 0,008x^6y^6$;
- 2) $64a^{24} - c^{33}$;
- 3) $0,001 - 8c^{12}d^{21}$.

551. Спростіть вираз:

- 1) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^3 - b^3)$;
- 2) $(3x - y)(3x + y)(9x^2 + 3xy + y^2)(9x^2 - 3xy + y^2)$;
- 3) $(m - 0,1n)(m^3 + 0,001n^3)(m^2 + 0,1mn + 0,01n^2)$;
- 4) $(b + 4c)(b^2 - 4bc + 16c^2)(64c^3 - b^3)$.

552. Спростіть вираз:

- 1) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^3 - y^3) + y^6$;
- 2) $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)(8a^3 + b^3) + b^6$;
- 3) $64c^6 - (8c^3 - b^3)(b + 2c)(b^2 - 2bc + 4c^2)$.

553. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(1 + 2x)(4x^2 - 2x + 1) - 4x(2x^2 - 5) = 21$;
- 2) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - x(x - 4)(x + 4) = 59$;
- 3) $(x - 6)(x^2 + 6x + 36) - x(x - 7)(x + 7) = 29$;
- 4) $(x - 5)(x^2 + 5x + 25) - x(x - 3)^2 = 2x(3x + 8)$.

554. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(1 + x)(x^2 - x + 1) - 0,04x(25x^2 - 5) = 20$;
- 2) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - x(x - 1)^2 = 4x(0,5x + 6,5)$.

555. Спростіть вираз:

- 1) $(3 + b)^3 - b^3$;
- 2) $(5 - 4a)^3 + 64a^3$;
- 3) $343y^6 - (5 + 7y^2)^3$;
- 4) $125x^3 - (5x + 1)^3$.

556. Спростіть вираз:

- 1) $(a^2c^2 + 3ac)^3 - 27a^6c^6$;
- 2) $(x^2y + 5)^3 - 125$.

557. Обчисліть:

- 1) $\frac{77^3 - 65^3}{12} - (77^2 + 65^2)$;
- 2) $\frac{39^3 - 21^3}{18} + 39 \cdot 21$.

558. Доведіть, що:

- 1) $79^3 - 29^3$ ділиться на 25;
- 2) $10^6 - 1$ ділиться на 3.

559. Доведіть, що:

- 1) $54^3 - 24^3$ ділиться на 60;
- 2) $41^3 + 19^3$ ділиться на 20.

560. Знайдіть значення $x^3 - y^3$, якщо:

- 1) $x - y = 8$, $xy = 133$;
- 2) $x - y = 2$; $xy = 15$.

561. Знайдіть значення $x^3 + y^3$, якщо:

1) $x + y = 8$, $xy = 12$;

2) $x + y = -12$; $xy = 32$.

562. Периметр основи одного куба на 16 см більший за периметр основи іншого куба, а різниця їх об'ємів дорівнює 124 см^3 . Знайдіть довжину ребра кожного куба.

563. Ребро одного куба на 2 см більше за ребро іншого куба. Різниця їх об'ємів дорівнює 26 см^3 . Знайдіть довжину ребра кожного куба.

564*. Доведіть, що сума кубів двох послідовних непарних натуральних чисел ділиться на 4.

565*. Два натуральні числа при діленні на 13 дають в остачі 1 і 3 відповідно. Доведіть, що різниця кубів цих чисел ділиться на 13.

566*. Доведіть, що вираз $(x^2 - xy + y^2)^3 + (x^2 + xy + y^2)^3$ набуває невід'ємних значень за будь-яких числових значеннях змінних x і y .

567*. Доведіть тотожність:

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(x + z).$$

568*. Доведіть, що $x^3 + x^2y - xyz + y^2z + y^3 = 0$, якщо $x + y + z = 0$.

Проявіть компетентність

569. Для виготовлення каркасних макетів двох кубів Сергій розрахував, що йому знадобиться 2,4 м і 4,8 м проволочи (не враховуючи потреб на закріплення згинів). Яке ребро в більшого й меншого кубів? Обчисліть їх об'єми, округливши результат до сотих.



570. Цукор і сіль мама зберігає в ємностях, які мають форму куба з ребрами 12 см і 8 см відповідно. На скільки більше за об'ємом мама зберігає в ємностях цукру, аніж солі?



§ 14. СПОСОБИ РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

1. Про суть розкладання многочлена на множники

Ситуація. Дарина Олегівна запропонувала Наталці й Тарасові розв'язати рівняння:

$$(x - 2)(x + 3) = 0$$

$$\text{і } x^2 + x - 6 = 0.$$



qr.orioncentr.com.ua/uFGJD

Наталка й Тарас зробили такі записи.

Наталка

$$(x - 2)(x + 3) = 0,$$

$$x - 2 = 0 \text{ або } x + 3 = 0,$$

$$x = 2 \text{ або } x = -3.$$

Тарас

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

$$(x - 2)(x + 3) = 0,$$

$$x - 2 = 0 \text{ або } x + 3 = 0,$$

$$x = 2 \text{ або } x = -3.$$



Чому Наталка й Тарас отримали однакові відповіді?

Ліві частини рівнянь є тотожно рівними виразами.



Тарас виконав дію, обернену до дії множення многочленів, а саме, подав многочлен $x^2 + x - 6$ як добуток двох множників $(x - 2)(x + 3)$. Таку дію називають *розкладанням многочлена на множники*.

Запам'ятайте!

Розкласти многочлен на множники — означає перетворити його в добуток не менш як двох виразів.

Для розкладання многочлена на множники застосовують різні способи, як-от: винесення спільного множника за дужки, застосування формул скороченого множення, спосіб групування.

2. Винесення спільного множника за дужки



Щоб винести спільний множник (СМ) за дужки:

- 1) визначте **коефіцієнт спільного множника**. Для цього знайдіть НСД модулів коефіцієнтів членів многочлена;
- 2) визначте **буквену частину спільного множника**. До неї доберіть найнижчі степені усіх змінних, що є множниками в *кожному* із членів многочлена;
- 3) винесіть знайдені **числовий** і **буквені множники** за дужки;
- 4) запишіть вираз, що залишиться в дужках.

Задача 1 Винесіть спільний множник за дужки:

1) $2a^2b^5 - 16ab^6$; 2) $2ab(x - 4y) - (4y - x)$.

Розв'язання

1) Запишемо вираз:

Знайдемо СМ:

Винесемо СМ за дужки:

2) Запишемо вираз:

Знайдемо СМ:

Винесемо СМ за дужки:

$$\begin{aligned} -2a^2b^5 - 16ab^6 &= \\ &= -2ab^5 \cdot a - 2ab^5 \cdot 8b = \\ &= -2ab^5(a + 8b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2ab(x - 4y) - (4y - x) &= \\ &= 2ab(x - 4y) + (x - 4y) = \\ &= (x - 4y)(2ab + 1). \end{aligned}$$

3. Застосування формул скороченого множення (ФСМ)

qr.orioncentr.com.ua/kQQ9u



Як застосувати ФСМ, щоб розкласти многочлен на множники?



Треба виявити відповідну ФСМ у виразі.



Задача 2 Розкладіть на множники двочлен $4x^2y^2 - 9y^4$.

Розв'язання Задачу можна розв'язати двома способами.

Спосіб 1.

Запишемо даний вираз:

$$4x^2y^2 - 9y^4 =$$

Виділимо квадрати:

$$= (2xy)^2 - (3y^2)^2 =$$

Застосуємо ФСМ:

Винесемо СМ за дужки:

Запишемо результат:

$$\begin{aligned} &= (2xy + 3y^2)(2xy - 3y^2) = \\ &= y(2x + 3y) \cdot y(2x - 3y) = \\ &= y^2(2x + 3y)(2x - 3y). \end{aligned}$$

Спосіб 2.

Запишемо даний вираз:

Винесемо СМ за дужки:

Застосуємо ФСМ:

$$\begin{aligned} &4x^2y^2 - 9y^4 = \\ &= y^2(4x^2 - 9y^2) = \\ &= y^2(2x + 3y)(2x - 3y). \end{aligned}$$



Якщо спочатку винести спільний множник за дужки, то застосовувати формули скороченого множення буде легше.

4. Спосіб групування

qr.orioncentr.com.ua/xGvxE



Як діяти, якщо многочлен містить більше як три члени і не має спільних множників?



Застосувати спосіб групування.



Задача 3

Розкладіть на множники многочлен

$$a^3 - 3a^2 - 4a + 12.$$

Розв'язання

Запишемо многочлен:

Згрупуємо доданки:

Винесемо СМ за дужки:

Винесемо СМ за дужки:

Застосуємо ФСМ:

$$\begin{aligned} &a^3 - 3a^2 - 4a + 12 = \\ &= (a^3 - 3a^2) - (4a - 12) = \\ &= a^2(a - 3) - 4(a - 3) = \\ &= (a - 3)(a^2 - 4) = \\ &= (a - 3)(a - 2)(a + 2). \end{aligned}$$



Доданки у многочлені можна групувати різними способами.

Якщо за дужки

виносять множник:

— зі знаком «+»

— зі знаком «-»

то доданки в дужках:

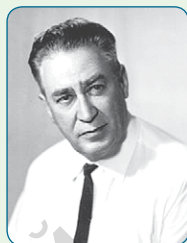
— знаки **зберігають**

— знаки **змінюють**
на протилежні

Дізнайтеся більше

Калужнін Лев Аркадійович (1914–1990) — видатний український математик-алгебраїст, доктор фізико-математичних наук, професор. Із 1955 р. працював у Київському університеті (нині — Київський національний університет імені Тараса Шевченка).

Є автором понад 130 наукових та науково-методичних праць. Створив потужну наукову школу. Наукові дослідження належать до різних розділів алгебри та дискретної математики, але найвагоміші результати стосуються теорії груп. qr.orioncentr.com.ua/uKLGK



Словничок

qr.orioncentr.com.ua/mGz0u

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
розклад многочлена на множники	factoring polynomials	Faktori- sierung von Polynomen	factorisation d'un polynôme

Пригадайте головне

1. Що означає розкласти многочлен на множники?
2. Які способи розкладання многочлена на множники ви знаєте?
3. Як перевірити, чи правильно виконали винесення спільного множника за дужки?

Усне тренування

1. Обчисліть зручним способом:

1) $21 \cdot 19 + 21$; 3) $62 - 5 \cdot 31$;

2) $137 \cdot 5 - 5 \cdot 37$; 4) $125^2 - 25^2$.

2. Чи ділиться значення даного виразу на число a :

1) $15^2 - 27^2$, якщо $a = 12$; 2) $19^2 - 13^2$, якщо $a = 32$?

3. Обчисліть зручним способом:

1) $25^2 - 2 \cdot 25 \cdot 5 + 5^2$;

2) $27^2 + 7^2 - 2 \cdot 27 \cdot 7$.

Розв'яжіть задачі

571'. У якій із рівностей правильно винесено спільний множник за дужки:

1) $2a + 6b = 2(a + b)$; 3) $ab + bc = a(b + c)$;

2) $2a + 6b = 2(a + 3b)$; 4) $ab + bc = b(a + c)$?

572'. У якій із рівностей правильно застосовано формулу скороченого множення:

1) $c^2 - b^2 = (c - b)(c - b)$;

2) $c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$;

3) $9 - b^2 = (9 + b)(9 - b)$;

4) $9 - b^2 = (3 - b)(3 + b)$;

5) $a^3 - d^3 = (a - d)(a^2 + ad + d^2)$;

6) $a^3 - d^3 = (a - d)(a^2 + 2ad + d^2)$;

7) $t^3 + 1 = (t + 1)(t^2 - t + 1)$;

8) $t^3 + 1 = (t - 1)(t^2 + t + 1)$?

573'. Розкладіть на множники многочлен способом винесення спільного множника за дужки:



1) $2x^2 + 8x$;

2) $9x^4 - 12x^3$;

3) $-x^4y^6 + x^3y^4$;

4) $6x^2 - 2x + 10x^3$;

5) $3x^3y^2 - 6x^3y^5$;

6) $-12xz^2 - 8x^3z^2$;

7) $2m^2 + 4m - 6m^3$;

8) $-6n^4 - 9n^6 - 12n^3$;

9) $0,4a^3 - 1,6a^5 + 0,8a^2$;

10) $y(7x - 3) + y(1 - 2x)$;

11) $p(5z - d) - 2p(6d + z)$;

12) $c^2(5a + 3b) + c^2(a - 8b)$.

qr.orioncentr.com.ua/LPkTQ

574'. Розкладіть на множники многочлен способом винесення спільного множника за дужки:

1) $12b^5 - 24b^3$;

3) $a^4b^3 - 9a^3b^4 - 81a^2b^2$;

2) $10a^3b + a^2b^3$;

4) $a(7b - c) + a(c - 12b)$.

575'. Розкладіть на множники вираз способом винесення спільного множника за дужки:

1) $a(b + c) - x(b + c)$;

3) $6x(y - 2z) - 3(y - 2z)$;

2) $y(a - 2b) + x(a - 2b)$;

4) $x(y + 4) + (4 + y)$;

- 5) $b(3b + 5) - 9b - 15$; 7) $6x(m - n) + (n - m)$;
 6) $2m(n - 1) - n(1 - n)$; 8) $(x^2 - y^2) + 18ab(y^2 - x^2)$.

576°. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб утворилася тотожність:

- 1) $2a^2 + 4a^3 + 6a^4 = * \cdot (1 + 2a + 3a^2)$;
 2) $9b^3 + 12b^2 + 18b^5 = 3b^2(3b + * + 6b^3)$;
 3) $25a^2b^2 + 40a^3b^3 + 65a^5b^5 = * \cdot (5 + 8ab + 13a^3b^3)$;
 4) $19b^3c^3 + 38b^2c^5 + 19b^2c^4 = 19b^2c^3(b + * + c)$.

577°. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб утворилася тотожність:

- 1) $15n^2 + 10n^7 + 35n^3 = * \cdot (3 + 2n^5 + 7n)$;
 2) $42m^5n^4 + 49m^4n^5 + 35m^3n^3 = * \cdot (6m^2n + 7mn^2 + 5)$.

578°. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - x = 0$; 4) $d(4d^3 - 2d^2 - 1) = -d$;
 2) $y^2 + 3y = 0$; 5) $2z(z - 3) + 14z = 19z$;
 3) $5a^2 - 4a = 0$; 6) $-x(x - 4) + 3(x - 4) = 0$.

579°. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x - 2x^2 = 0$; 3) $y^2 - 2(y - 5) - 4y = 3y + 10$;
 2) $-7t^3 - 14t^2 = 0$; 4) $3(m - 3) - m(3 - m) = 0$.

580°. Знайдіть значення виразу зручним способом:

- 1) $5,76x - x^2$, якщо $x = 4,76$;
 2) $m^2n - mn^2$, якщо $m = 0,1$, $n = -0,9$.

581°. Знайдіть значення виразу зручним способом:

- 1) $12,6a - a^2$, якщо $a = 10,6$;
 2) $m^2n - mn^2$, якщо $m = 18$, $n = -2$.

582°. Доведіть, що значення виразу ділиться на a :

- 1) $7 \cdot 121 + 3 \cdot 121$, якщо $a = 10$;
 2) $14 \cdot 2023 - 14 \cdot 23$, якщо $a = 2000$;
 3) $12,5 \cdot 16,3 - 12,5 \cdot 0,3 - 12,5$, якщо $a = 15$.

583°. Розкладіть на множники многочлен, використавши формули скороченого множення:

- 1) $25m^2 - 4$; 4) $0,04a^4 - 0,81$; 7) $b^{12}c^4 - 36$;
 2) $16b^2 - 9$; 5) $9 - 36n^4$; 8) $a^2b^6 - 25$;
 3) $64 - 25a^2$; 6) $0,49a^4 - 0,04$; 9) $x^4y^2 - 0,81$.

584°. Розкладіть на множники многочлен, використавши формули скороченого множення:

1) $4m^2 - n^2$; 2) $c^6 - 16b^{10}$; 3) $x^8y^4 - 0,36$.

585°. Запишіть замість зірочок такі одночлени, щоб утворилася тотожність:

1) $4a^2 - 25b^2 = (* - 5b)(* + 5b)$;

2) $81x^2y^4 - 16a^6 = (* - 4a^3)(* + 4a^3)$;

3) $\frac{1}{9}c^2d^4 - 0,16a^2 = (* - 0,4a)(* + 0,4a)$.

586°. Подайте многочлен у вигляді добутку:

1) $9a^2 - 6ab + b^2$;

5) $0,25z^2 + cz + c^2$;

2) $16x^2 + 8xy + y^2$;

6) $c^4 - 4c^2d + 4d^2$;

3) $25c^2 - 20cd + 4d^2$;

7) $9x^6 - 48x^3y^4 + 64y^8$;

4) $a^2b^2 + 2ab + 1$;

8) $25a^{10} + 30a^5b^4 + 9b^8$.

587°. Розкладіть на множники многочлен, використавши формули скороченого множення:



1) $8a^6 - 27$;

10) $-a^2 + 10ab - 25b^2$;

2) $b^{12} - 64$;

11) $4x^4 - 12x^2 + 9$;

3) $0,125x^3 - 1$;

12) $-c^6 - 8c^3b^2 - 16b^4$.

4) $a^2b^6 - a^4b^8$;

5) $a^{12}b^3 - a^6b^6$;

6) $a^3b^3 + a^6b^6$;

7) $4m^2n^6p^4 - 16$;

8) $27a^3b^6 - 8c^9$;

9) $125a^3b^3 + 64d^3$;



qr.orioncentr.com.ua/03yzW

588°. Розкладіть на множники многочлен, використавши формули скороченого множення:

1) $b^6 + 125$;

4) $a^4 - 16$;

2) $216 - x^9$;

5) $a^{12} - 0,01$;

3) $343m^3b^9 + 8n^6$;

6) $16a^2 + 48a + 36$.

589°. Розв'яжіть рівняння:

1) $a^3 - a = 0$;

5) $-t^3 - 16t^2 - 64t = 0$;

2) $-16b^4 + b^2 = 0$;

6) $(2x - 1)^2 - 25 = 0$;

3) $4x^5 - 4x = 0$;

7) $x^2 - (3 + x)^2 = 0$;

4) $5n^6 - 6n^5 = 0$;

8) $(2x - 6)^2 - (5x + 1)^2 = 0$.

590°. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^3 - 4x = 0$;
- 2) $y^3 - 14y^2 + 49y = 0$;
- 3) $4m(2 - m) + 3(m - 2) = 0$;
- 4) $(c - 5)^2 - (5 - 3c)^2 = 0$.

591°. Знайдіть значення виразу раціональним способом:

- 1) $x^4 - x^2y^2$, якщо $x = 3$, $y = 2$;
- 2) $a^2b - 16b$, якщо $a = 104$, $b = 0,2$;
- 3) $c(c^2 + 2cd + d^2) + d(c^2 + 2cd + d^2)$, якщо $c = 1,2$, $d = -0,2$;
- 4) $(5r - 1)(7 - 2s) - (2s - 7)(25r + 11)$, якщо $s = -1,5$, $r = 0,01$.

592°. Знайдіть значення виразу раціональним способом:

- 1) $a^2b + ab^2$, якщо $a = 120$, $b = -20$;
- 2) $4ab^3 - 4ab^2 + ab$, якщо $a = 4$, $b = 0,75$.

593°. Розкладіть на множники многочлен способом групування:



- 1) $2a^3 + 2a + a^2 + 1$;
- 2) $b^3 - 3b^2 + 5b - 15$;
- 3) $16m^4 - 8m^3 + 6m - 3$;
- 4) $a^3b + ab^3 + a^2 + b^2$;
- 5) $bc^2 - b^2c + 5b - 5c$;
- 6) $m^2n^2 - n^4 + 6m^2 - 6n^2$;
- 7) $a^3 - a^2b + a - b$;
- 8) $2abc + 5ac + 15 + 6b$.



qr.orioncentr.com.ua/Rok1g

594°. Розкладіть на множники многочлен способом групування:

- 1) $3x^3 + x + 3x^2 + 1$;
- 2) $5a^2 - 15ab + 2a - 6b$;
- 3) $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$;
- 4) $0,4mn + 1,6 + 0,8m^2n + 3,2m$;
- 5) $x^2 + 3x + x + 3$;
- 6) $xy^2 - x^2y + x - y$.

595°. Запишіть замість зірочки такий двочлен, щоб утворилася тотожність:

- 1) $a^3 - 2a^2 + 4a - 8 = (a - 2) \cdot (*)$;
- 2) $2b^4 - 6b^3 + 9b - 27 = (*) \cdot (2b^3 + 9)$.

596°. Запишіть замість зірочки такий двочлен, щоб утворилася тотожність:

$$1) x^4 + 4x^3 + 5x + 20 = (*) \cdot (x^3 + 5);$$

$$2) 4b^6 - 12b^4 + 7b^2 - 21 = (b^2 - 3) \cdot (*).$$

597°. Розкладіть на множники многочлен:

$$1) 3x^3 - 3xy^2;$$

$$7) 7az^4 - 56a^4z;$$

$$2) 25a^3b - 16ab^3;$$

$$8) x^3y^3 + 64x^6y^6;$$

$$3) 5c^2d^2 - 125c^4d^4;$$

$$9) 3a^2b - 6ab^2 + 3b^3;$$

$$4) 18m^4n^2 - 162m^2n^4;$$

$$10) 7x^3 - 14x^2y + 7xy^2;$$

$$5) ac^3 - ab^3;$$

$$11) a^2 - 2ab + b^2 - c^2;$$

$$6) -8mn^3 - 27md^3;$$

$$12) 9 - c^2 - 4mc - 4m^2.$$

Якими способами ви скористалися?

598. Подайте у вигляді добутку вираз:

$$1) (a + 3)(b - 2) + (a + 3)(2b - 5);$$

$$2) (2x - 1)(5 + 7x) - (13x + 2)(2x - 1);$$

$$3) (4m - 2n)(7n + 1) + (n - 8m)(-7n - 1);$$

$$4) (y - 1)^2 - (y - 1)^2(5 - 8y);$$

$$5) (a - b)(7a - b) - (b - a)^2;$$

$$6) (6z - 5)^2(1 - z) - (5 - 6z).$$

599. Подайте у вигляді добутку вираз:

$$1) (3x - 2y)(1 - 4x) + (3x - 2y)(8 + 9x);$$

$$2) (m - 3n)(9n - 5) - (5 - 9n)(n - 6m);$$

$$3) (1 + y) - (1 + y)^2.$$

600. Відомо, що за деякого значення x значення виразу $x^2 - 4x + 5$ дорівнює 7. Знайдіть за цього самого значення x значення виразу:

$$1) 3x^2 - 12x + 15; \quad 2) x^2(x^2 - 4x + 1) - 4x(x^2 - 4x + 1).$$

601. Подайте у вигляді добутку вираз:

$$1) a^2(a + b) + 2a(a + b) + a + b;$$

$$2) x^2(x + 2) - 4x(x + 2) + 4(x + 2);$$

$$2) 9m^2(2m + 3) - 36(2m + 3).$$

602. Розкладіть на множники вираз:

$$1) (2y + 3)^2 - (5x + 1)^2; \quad 3) (3xy + 4)^2 - 9x^2y^2;$$

$$2) (4n^2 + 1)^2 - (3 + n^2)^2; \quad 4) (0,2ab + 5)^2 - 0,04a^2b^2.$$

- 603.** Розкладіть на множники вираз:
1) $(2b + 3)^2 - (5 + b)^2$; 2) $(m^2n^2 + 3)^2 - m^4n^4$.
- 604.** Розкладіть на множники вираз:
1) $(3x + 4)^3 - 27x^3$; 2) $(-2b + 3a)^3 + 8b^3$.
- 605.** Розкладіть на множники вираз і знайдіть його значення:
1) $16x^4 - (2x - 1)^4$, якщо $x = 0,5$;
2) $(2x + 5)^3 - (2x - 5)^3$, якщо $x = -0,1$.
- 606.** Розкладіть на множники вираз:
1) $(3x + 4)^4 - 81x^4$; 3) $(3x + 4)^2 - 48x$;
2) $(2a + 3b)^4 - 9b^2$; 4) $(2a + 3b)^2 - 24ab$.
- 607.** Доведіть, що:
1) $4^3 - 1$ ділиться на 7;
2) $169^2 - 44^2$ ділиться на 15;
3) $222^2 - 78^2$ ділиться на 360.
- 608.** Подайте у вигляді добутку многочлен, виділивши повний квадрат:
1) $9x^2 + 6x + 1 - 16y^2$; 3) $a^2 + 4a - 5$;
2) $16 + 9b^2 - 24b - 25a^2$; 4) $x^2 - 2x - 8$.
- 609.** Розкладіть на множники многочлен:
1) $x^2 - 5x + 6$; 3) $x^4 + 5x^2 - 6$;
2) $y^2 - 3y + 2$; 4) $x^4 - 3x^2 - 4$.
- 610.** Розкладіть на множники многочлен:
1) $x^2 - 8x + 15$; 2) $m^2 - 7m + 12$.
- 611.** Знайдіть периметр прямокутника, якщо його ширина на 2 см менша від довжини, а площа дорівнює 255 см^2 .
- 612.** На прямокутній ділянці землі, довжина якої на 30 м більша за ширину, побудовано теплицю площею 800 м^2 . Які розміри всієї ділянки, якщо теплицею не зайнято 3200 м^2 ділянки?
- 613.** Подайте у вигляді добутку многочлен:
1) $x^4 + x^2 + 1$; 2) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.



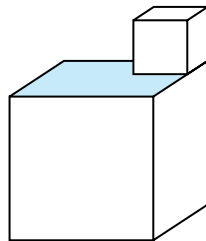
- 614*.** Доведіть, що вираз $n^4 + 3n^3 - n^2 - 3n$ ділиться на 6 за будь-якого натурального значення n .
- 615*.** Доведіть, що вираз $(2n - 1)^3 - (2n - 1)$ ділиться на 24 за будь-якого натурального значення n .
- 616*.** За умови, що $2a^2 + 4a - 1 = 6$ за деякого значення змінної a , знайдіть значення виразу:
 $12a^4 + 48a^3 + 42a^2 - 12a$.

Проявіть компетентність

- 617.** У трикімнатній квартирі підлога першої кімнати має форму квадрата зі стороною a , другої — форму квадрата зі стороною b , а третьої — форму прямокутника зі сторонами a і b відповідно. Сума площ підлог першої, другої та подвоєної площі третьої кімнати дорівнює 49 м^2 . Знайдіть периметр кімнати, підлога якої має форму прямокутника.

- 618.** Відомо, що різниця квадратів віку тата семи-класниці Ірини та її віку дорівнює добутку чисел 49 і 25. Знайдіть вік тата і дівчинки.

- 619.** Макар і Назар виготовили конструкцію з двох кубів і частково її пофарбували, як на малюнку 14. Знайдіть об'єм цієї конструкції, якщо її висота дорівнює 2,5 м, а площа пофарбованої поверхні — $1,25 \text{ м}^2$.



Мал. 14

- 620.** Галина задумала натуральне число, піднесла його до квадрата, до результату додала квадрат наступного в натуральному ряді числа, потім відняла число 1 і повідомила, що отримане число ділиться націло на 4. Чи не помилилася Галина в обчисленнях? Відповідь обґрунтуйте.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 3

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке одночлен?
2. Який вигляд одночлена називають стандартним?
3. Що називають коефіцієнтом одночлена? Степенем одночлена?
4. Як піднести одночлен до степеня?
5. Що таке многочлен?
6. Як звести многочлен до стандартного вигляду?
7. Який член многочлена називається старшим?
8. Що називається степенем многочлена? Як його визначити?
9. Що означає додати многочлени?
10. Як помножити одночлен на многочлен? Многочлен на многочлен?
11. Які тотожності називають формулами скороченого множення?
12. Запишіть формули для обчислення квадрата суми та квадрата різниці.
13. Запишіть формулу різниці квадратів.
14. Запишіть формулу суми кубів; різниці кубів.
15. Що означає розкласти многочлен на множники?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

№ 1

- 1°. У стандартному вигляді записано одночлен:

А. $9,51$. Б. $a + b$. В. $a^3 \cdot a^5$. Г. $\frac{5}{a}$.

- 2°. Зведіть подібні члени многочлена:

$$y + 1,1y - 6y^3 + 2y - 1,1y^3 - y^2 - 0,1y + 7\frac{1}{10}y^3.$$

А. $2y - 2\frac{1}{10}y^3 - y^2$. Б. $\frac{1}{10}y^3 - y^2$. В. $-y^2$. Г. $-y^2 + 4y$.

- 3°. Який степінь многочлена $9m^3 + 1 + 2m^6 - m^4 + 8m$?

А. 9. Б. 8.
Б. 3. Г. 6.

4. Знайдіть добуток одночленів: $0,5(y^6)^3 \cdot (2y^8)^5$.
 А. y^{22} . Б. y^{58} . В. $16y^{58}$. Г. $8y^{22}$.

- 5*. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{1}{4}xy + 3a\right)(0,0625x^2y^2 - \frac{3}{4}xya + 9a^2).$$

- А. $\frac{1}{16}x^2y^2 + 9a^2$. В. $x^3y^3 + 27a^3 + \frac{3}{4}x^2y^2a$.
 Б. $\frac{1}{64}x^3y^3 + 27a^3$. Г. $\frac{25}{64}x^3y^3 + 27a^3$.

№ 2

- 1°. Подайте вираз $(7a + 5b)^2$ у вигляді многочлена.

- А. $7a^2 + 35ab + 5b^2$.
 Б. $49a^2 + 35ab + 25b^2$.
 В. $49a^2 + 70ab + 25b^2$.
 Г. $7a^2 + 70ab + 5b^2$.

- 2°. Піднесіть до квадрата двочлен $0,3x - 0,1y$.

- А. $0,3x^2 - 0,03xy + 0,1y^2$.
 Б. $0,9x^2 - 0,06xy + 0,1y^2$.
 В. $0,09x^2 - 0,06xy + 0,01y^2$.
 Г. $0,09x^2 - 0,06xy - 0,01y^2$.

- 3°. Розкладіть на множники многочлен $8c^6 - 125$.

- А. $(2c^2 - 5)(4c^4 + 10c^2 + 25)$.
 Б. $(2c^3 - 5)(4c^6 + 10c^3 + 25)$.
 В. $(2c^2 + 5)(4c^4 - 10c^2 + 25)$.
 Г. $(2c^2 + 5)(4c^6 - 20c^2 + 25)$.

- 4*. Обчисліть, не користуючись калькулятором:
 $101^2 - 99^2$.

- А. 200. В. 400.
 Б. 4. Г. 1.

- 5*. Розкладіть на множники вираз:

$$(x - y)^2 - z^2 - 4x^2 + 4xy + 4xz.$$

- А. $(x - y - z)(z - y - 3x)$. В. $(x - y + z)(z - y + 5x)$.
 Б. $(x - y + z)(z - y - 4x)$. Г. $(x - y - z)(z + y + 3x)$.



Розділ 4. ФУНКЦІЇ

У розділі дізнаєтесь:

- що таке функція, її область визначення і область значень;
- про способи задання функції;
- що називають графіком функції та як його побудувати;
- яка функція називається лінійною та які її властивості;
- яка функція називається прямою пропорційністю та які її властивості;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці

§ 15. ЩО ТАКЕ ФУНКЦІЯ?

1. Функціональна залежність

Ситуація. Мама дала Іринці 60 грн для того, щоб вона купила тістечка до чаю. Яка буде вартість покупки, якщо одне тістечко коштує 18 грн?



qr.orioncentr.com.ua/uOpEK



Від чого залежить вартість покупки?

Від кількості куплених тістечок.



Це означає, що кількість тістечок n є змінною величиною, а вартість покупки P залежить від кількості тістечок n . Тому n вважають незалежною змінною, а P — залежною змінною. У цій залежності кожному значенню n відповідає єдине значення P . І таку залежність називають *функціональною залежністю*.

Запам'ятайте!

Правило, згідно з яким кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної, називається *функцією*.



Функцію найчастіше позначають літерою f , незалежну змінну — літерою x , а залежну змінну — літерою y . Тоді функціональну залежність змінної y від змінної x коротко записують: $y = f(x)$ і читають: «Ігрек дорівнює еф від ікс».



Незалежну змінну називають *аргументом функції*, а залежну змінну — *функцією*.

$$y = x + 2 \quad f(x) = x + 2$$

↖ Функція ↗
↖ Аргумент ↗

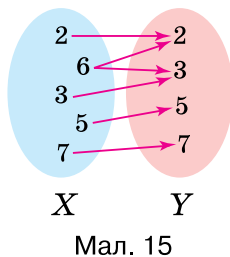


Чи кожна відповідність є функціональною залежністю?

Ні.



Наприклад, на малюнку 15 деяким натуральним числам (множина X) поставили у відповідність їх простий дільник (множина Y). Така відповідність не є функцією, бо числу 6 із множини X відповідає більше, ніж один простий дільник із множини Y . А це суперечить означенню функціональної залежності.



2. Способи задання функції



Як можна задати функцію?

По-різному.



Спосіб 1. Функцію можна задати *описово*, тобто *словесно*, наприклад, кожному учню 7-го класу поставили у відповідність число, що відповідає номеру його телефона.

Спосіб 2. Функцію можна задати *аналітично*, тобто *за допомогою формули*, наприклад, $s = 14t$, $y = 3x$.

Задача 1 Функція задана формулою $y = x^3 - 8$.

1) Знайдіть значення функції для $x = -1; 0; 2$.

2) Знайдіть значення аргументу, за якого функція набуває значення $y = 19$.

Розв'язання

1) Щоб знайти значення функції для заданих значень аргументу, підставимо ці значення у формулу, що задає функцію:

якщо $x = -1$, то $f(-1) = (-1)^3 - 8 = -1 - 8 = -9$;

якщо $x = 0$, то $f(0) = 0^3 - 8 = 0 - 8 = -8$;

якщо $x = 2$, то $f(2) = 2^3 - 8 = 8 - 8 = 0$.

2) Щоб знайти значення аргументу для $y = 19$, підставимо це значення у формулу: $19 = x^3 - 8$, звідси $x^3 = 27$, $x = 3$.

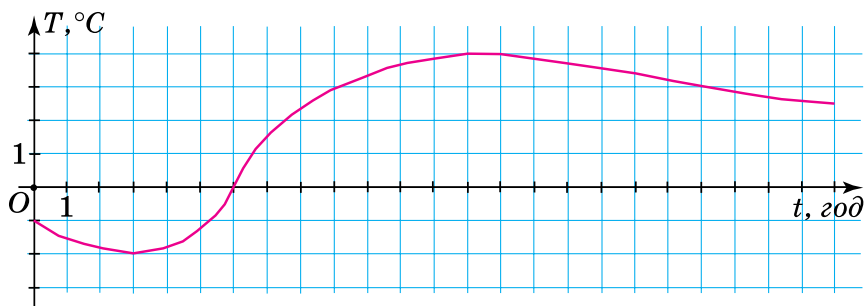
Спосіб 3. Функцію можна задати *таблицно*. Наприклад, такою є таблиця 21.

Таблиця 21

x	-2	-1	0	1	2
$y(x)$	4	-2	-4	-2	4

За таблицею, значенню аргументу $x = -1$ відповідає значення функції $y = -2$, а значенню аргументу $x = 2$ — значення функції $y = 4$.

Спосіб 4. Функцію можна задати за допомогою *графіка*. Наприклад, на малюнку 16 зображено графік зміни температури повітря впродовж доби.



Мал. 16



Щоб задати функцію, використовують такі способи:

- описовий;
- аналітичний;
- табличний;
- графічний.



3. Область визначення функції

qr.orioncentr.com.ua/FzY9p

Запам'ятайте!

Усі допустимі значення аргументу утворюють *область визначення функції*.



Область визначення функції коротко позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Задача 2 Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

$$1) y = \frac{5x}{x+3}; \quad 2) y = \frac{4x+1}{3}.$$

Розв'язання

1) Знайдемо значення x , за яких знаменник дробу дорівнює нулю:

$$x + 3 = 0; x = -3.$$

Отже, $x = -3$ не є допустимим значенням функції, а її областю визначення є всі числа, крім $x = -3$, тобто:

$$D(y): x \neq -3.$$

2) Оскільки даний дріб має зміст за будь-якого значення x , то областю визначення функції є всі числа, тобто:

$$D(y): x \text{ — будь-яке число.}$$

4. Область значень функції

Запам'ятайте!

Усі значення, яких набуває функція для допустимих значень аргументу, утворюють *область значень функції*.



Область значень функції коротко позначають $E(f)$.

Задача 3 Периметр прямокутника зі сторонами a і b дорівнює 28 см. Складіть формулу залежності довжини сторони a від довжини сторони b . Назвіть аргумент цієї функції. Знайдіть її область визначення і область значень.

Розв'язання

1. Периметр прямокутника зі сторонами a і b дорівнює $P = 2(a + b)$. За умовою задачі $p = 28$ см. Отже, $28 = 2(a + b)$. Звідси $a = 14 - b$.

2. Для функції $a = 14 - b$ змінна b є аргументом.

3. Довжини сторін прямокутника можуть набувати лише додатних значень, тому $b > 0$ і $a > 0$. Оскільки $a = 14 - b$, то значення і незалежної змінної b , і залежної змінної a не можуть бути більшими за 14. Звідси $0 < b < 14$ і $0 < a < 14$. Отже:

$$D(f): 0 < b < 14, \quad E(f): 0 < a < 14.$$

Дізнайтеся більше

Перші спроби описати поняття «функція» були здійснені наприкінці XVII ст. **Готфрідом Вільгельмом Лейбніцем** (1646–1716), а також його учнями і послідовниками — братами Йоганном і Якобом Бернуллі. Термін «функція» належить Лейбніцу і походить від латинського слова *function*, що означає «виконання», «здійснення». Термін «аргумент функції» походить від латинського *argumentum*.



qr.orioncentr.com.ua/239YY

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/f66bd

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
функція	function	Funktion (f)	fonction

Пригадайте головне

1. Наведіть приклад функціональної залежності.
2. Сформулюйте означення функції.
3. Як позначають функцію?
4. Що називають аргументом функції?
5. Назвіть способи задання функцій.
6. Що таке область визначення функції?
7. Що таке область значень функції?

Усне тренування

Обчисліть:

- 1) $(6 + 2^2) : 5$; $(6 - 2^2) \cdot 5$; $((6 + 2) : 2)^2$; $(6 : 2 - 2)^2$;
- 2) $(3^2 + 1) : 5$; $(3^2 - 2) \cdot 5$; $(3 + 2)^2 : 0,5$; $(4 \cdot 0,5)^2 - 0,2$.

Розв'яжіть задачі

- 621'.** Прочитайте запис: 1) $y = F(x)$; 2) $s = g(t)$; 3) $r = f(\varphi)$. Назвіть залежну і незалежну змінні.
- 622'.** Чи правильно, що x є аргументом функції:
1) $y = 3x + 2$; 2) $x = 4t - 5$; 3) $r = 4\varphi^2 - 5\varphi + 1$?
- 623'.** Чи правильно, що y є функцією від a , якщо:
1) $y = 3a + 2$; 2) $a = y^3 + 2y$; 3) $p = y^4 + 2y - 7$?
- 624°.** Кілограм помідорів коштує 45 грн. Чи пов'язані функціональною залежністю вартість помідорів та їхня маса? Якщо так, то назвіть незалежну й залежну змінні.
-  **625°.** Квиток на проїзд у міжміському автобусі коштує 123 грн. Чи пов'язані функціональною залежністю вартість поїздки великої родини та кількість членів родини? Якщо так, то назвіть незалежну й залежну змінні.
- 626°.** Кожному натуральному числу відповідає вдвічі більше натуральне число. Чи є дане правило функцією? Якщо так, то запишіть його у вигляді формули.

627°. Одна ремонтна бригада за день укладає 250 м^2 асфальту. Чи пов'язані функціональною залежністю кількість укладеного асфальту за день та кількість бригад? Якщо так, то задайте цю залежність формулою та назвіть незалежну й залежну змінні.

628°. У кафе завезли 200 кг яблук. Щодня використовують близько 25 кг . Чи пов'язані функціональною залежністю кількість яблук, що залишились і кількість днів? Якщо так, то задайте цю залежність формулою та назвіть незалежну й залежну змінні.

629°. Прочитайте функцію, задану описово, та назвіть незалежну й залежну змінні:

- 1) кожному значенню сторони квадрата відповідає певне значення його периметра;
- 2) кожному значенню кількості товару відповідає його вартість;
- 3) кожному значенню температури повітря відповідає певне значення висоти ртутного стовпчика термометра;
- 4) кожному значенню швидкості автомобіля відповідає певне значення пройденого шляху;
- 5) кожному натуральному числу поставили у відповідність квадрат цього натурального числа.

630°. Прочитайте функцію, задану описово та назвіть незалежну й залежну змінні:

- 1) кожному значенню радіуса кола відповідає певне значення діаметра цього кола;
- 2) кожному натуральному числу поставили у відповідність обернене до нього число.

631°. Прочитайте функцію, задану формулою, та назвіть аргумент і функцію:

- 1) $f(x) = 3x + 15$; 3) $h(y) = y^2 - y + 1$;
- 2) $g(y) = \frac{5x+1}{2}$; 4) $v(t) = 12$.

632°. Знайдіть значення функції $y = 5x - 6$ для:

- 1) $x = -3$; 3) $x = 0$; 5) $x = 5,4$;
 2) $x = -1$; 4) $x = 2$; 6) $x = \frac{1}{3}$.

633°. Знайдіть значення функції $y = 8 - 1,2x$ для:

- 1) $x = 0$; 3) $x = -5$; 5) $x = -0,2$;
 2) $x = 1$; 4) $x = 20$; 6) $x = 12$.

634°. Велосипедист їхав зі швидкістю 18 км/год. Запишіть у вигляді формули залежність пройденого ним шляху s від часу t . Знайдіть значення отриманої функції, якщо:



- 1) $t = 3$ год; 2) $t = 3,5$ год; 3) $t = 10,2$ год.

635°. Поїзд рухався зі швидкістю 75 км/год. Запишіть у вигляді формули залежність пройденого ним шляху s від часу t . Знайдіть значення отриманої функції, якщо:



- 1) $t = 9$ год; 2) $t = 11,5$ год; 3) $t = 20,4$ год.

636°. За даними таблиці 22 знайдіть невідомі величини, якщо $f(x) = -3x + 8$.

Таблиця 22

x	-2		1		
$f(x)$		6		0	-1

637°. За даними таблиці 23 знайдіть невідомі величини, якщо $g(x) = 7 - 5x$.

Таблиця 23

x	-3				2,4
$g(x)$		13	0	-3	

638. Функцію задано формулою: $g = 2t^2 + 4$. Назвіть:

- 1) аргумент функції; 2) область визначення функції; 3) область значень функції.

639. Функцію задано формулою: $g = 5 - x^2$. Назвіть:

- 1) аргумент функції; 2) область визначення функції; 3) область значень функції.

- 640.** Накресліть у зошиті й заповніть таблицю 24, якщо



$$y(x) = -3x^2 + 2x - 1.$$

Таблиця 24

x	-2	-1	0	1	2
$y(x)$					



qr.orioncentr.com.ua/EuEba

- 641.** Накресліть у зошиті й заповніть таблицю 25, якщо

$$f(x) = -3x^3 + x + 4.$$

Таблиця 25

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

- 642.** Працівники фабрики відраховують у пенсійний фонд 5 % своєї заробітної платні. Введіть змінні та запишіть формулу залежності відрахувань у пенсійний фонд від розміру заробітної платні. Визначте область визначення та область значень отриманої функції.



- 643.** Страховий агент отримує 6,5 % від продажу страхових полісів. Уведіть змінні та запишіть формулу залежності доходу страхового агента від розміру проданих страхових полісів. Визначте область визначення та область значень отриманої функції.



- 644.** Кожному натуральному числу поставили у відповідність остачу від ділення цього числа на 6. Чи є така залежність функціональною? Якщо так, то знайдіть її область визначення і область значень.

- 645.** Наведіть приклад функції, заданої аналітично. Назвіть її область визначення та область значень.

- 646.** Наведіть приклад функції, заданої за допомогою таблиці. Назвіть її область визначення та область значень.

- 647.** Складіть із кроком 0,5 таблицю значень функції, заданої формулою $y = x^2(2 - 3x)$, якщо $-1 \leq x \leq 2$.

648. Складіть із кроком 1 таблицю значень функції, заданої формулою $y = 3(1 - x^2)$, якщо $-3 \leq x \leq 4$.

649. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:



$$1) y = \frac{3}{x-2};$$

$$2) y = x^2 + 4x + 2;$$

$$3) y = \frac{5x+2}{3};$$

$$4) y = -\frac{2}{4-3x}.$$



qr.orioncentr.com.ua/PENy0

650. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

$$1) y = x^3 - 7x;$$

$$3) y = -\frac{3}{7-21x};$$

$$2) y = \frac{5}{x-5};$$

$$4) y = -\frac{6x+1}{7}.$$

651. Знайдіть область значень функції, заданої формулою:

$$1) y = 3x^2;$$

$$3) y = -x^2 + 1;$$

$$5) y = |x| - 3;$$

$$2) y = x^2 + 2;$$

$$4) y = |x| + 7;$$

$$6) y = 5 - |x|.$$

652. Знайдіть область значень функції, заданої формулою:

$$1) y = x^2 + 4; \quad 2) y = |x| - 2.$$

653*. За яких значень a областю визначення функції є будь-які числа, якщо:

$$1) y = x^2 + a; \quad 2) y = \frac{2x}{|x|+a}; \quad 3) y = \frac{x-2}{x^2+2x+a}.$$

654*. Паперовий квадрат зі стороною 50 см потрібно розрізати на деяку кількість менших квадратів. Задайте формулою залежність кількості маленьких квадратів від довжини їх сторони. Скільки таких квадратів можна одержати, якщо сторона кожного дорівнює: 1) 25 см; 2) 10 см; 3) 5 см; 4) 4 см?

Проявіть компетентність

655. На пересування містом татів автомобіль витрачає щодня 8 л бензину. Задайте формулою функцію для визначення об'єму витраченого бензину залежно від кількості днів. Скільки літрів бензину потрібно купити татові, щоб йому вистачило на: 1) 5 днів; 2) 7 днів?

§ 16. КООРДИНАТНА ПЛОЩИНА. ГРАФІК ФУНКЦІЇ

1. Координатна площина

Ситуація. У будівельну компанію надійшла заявка побудувати арку на залізничний міст у вигляді кривої, що задана формулою

$$y = \frac{x(30-x)}{25}, \text{ де } 0 \leq x \leq 30. \text{ Який же}$$

вигляд має ця арка в прямокутній системі координат?



qr.orioncentr.com.ua/trHwT



Що називають прямокутною системою координат?

Пригадаймо.



Прямокутна система координат на площині (мал. 17) — це дві координатні прямі з рівними одиничними відрізками, що перетинаються під прямим кутом у початку відліку (*початку координат*); стрілками вказано додатний напрям на кожній з осей.



Координатні осі позначають так: *OX* (*вісь абсцис*) і *OY* (*вісь ординат*).

Запам'ятайте!

Площину із введеною на ній системою координат називають *координатною площиною*.

Кожній точці на площині можна поставити у відповідність пару чисел, взятих у певному порядку, і, навпаки, кожній парі чисел відповідає єдина точка координатної площини.

Така впорядкована пара чисел називається *координатами точки в даній системі координат*. На малюнку 18 точка A має координати: $x = 3, y = 2$.



Мал. 17

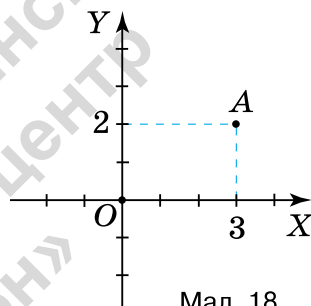


Коротко записують: $A(3; 2)$ і читають: «Точка A з координатами 3 і 2».



Точка, що лежить на осі абсцис, має координати $(x; 0)$. Точка, що лежить на осі ординат, має координати $(0; y)$.

Початок координат O має координати $(0; 0)$.



Мал. 18

2. Графік функції

qr.orioncentr.com.ua/k4lc5



Як побудувати зображення арки за формулою $y = \frac{x(30-x)}{25}, 0 \leq x \leq 30$?

Треба виконати три кроки.

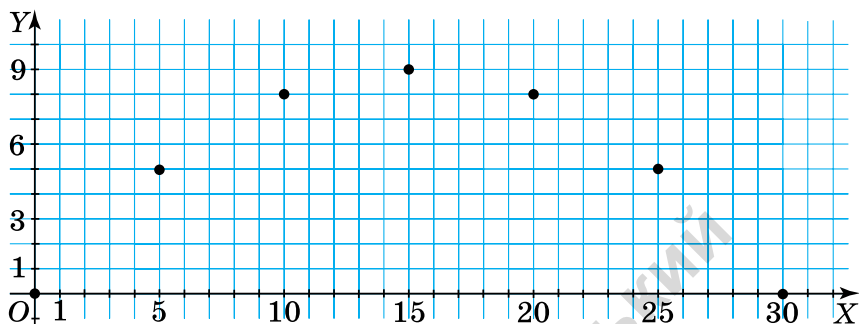


1. Складемо таблицю відповідних значень аргументу з кроком 5 (табл. 26).

Таблиця 26

x	0	5	10	15	20	25	30
y	0	5	8	9	8	5	0

2. Позначимо ці точки на координатній площині (мал. 19).



Мал. 19

3. Оскільки область визначення — усі числа від 0 до 30, то графіку належать й інші числа. Тому будемо вважати, що побудовані точки можна з'єднати плавною лінією (мал. 20).



Мал. 20

Отримали зображення арки — графік функції

$$y = \frac{x(30-x)}{25}, 0 \leq x \leq 30.$$

Запам'ятайте!

Графіком функції $y = f(x)$ називається зображення на координатній площині всіх точок, абсциси яких є значеннями аргументу, а ординати — відповідними значеннями даної функції.



Щоб побудувати графік функції:

- 1) знайдіть її область визначення;
- 2) заповніть таблицю значень функції для кількох значень аргументу;
- 3) на координатній площині побудуйте точки за їх координатами з таблиці;
- 4) з'єднайте ці точки плавною лінією, якщо це допускає область визначення функції.

Задача 1 Чи належить графіку функції $y = -x + 2$ точка:

- 1) $A(-3; 5)$; 2) $B(3; 1)$?

Розв'язання

Запишемо функцію:

$$y = -x + 2,$$

Підставимо значення x і y :

$$1) 5 = -(-3) + 2, \quad 2) 1 \neq -3 + 2,$$

Перевіримо рівність:

$$5 = 5.$$

$$1 \neq -1.$$

Висновок:

$$A \in y(x).$$

$$B \notin y(x).$$



Якщо координати точки задовольняють формулу, якою задано функцію, то ця точка належить графіку функції. І навпаки, якщо точка належить графіку функції, то її координати задовольняють формулу, якою задано функцію.

Задача 2 Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіка функції $y = 2x^2 - 8$ з осями координат.

Розв'язання

Вісь	Координати точки на осі	Підставляємо значення	Обчислюємо значення	Координати точок перетину з осями
OX	$(x; 0)$	$0 = 2x^2 - 8$	$x = 2$ або $x = -2$	$(2; 0)$, $(-2; 0)$
OY	$(0; y)$	$y = 2 \cdot 0^2 - 8$	$y = -8$	$(0; -8)$



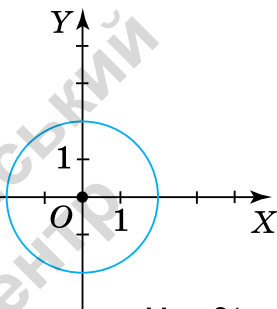
Чи будь-яка лінія в системі координат $ХОУ$ задає функцію?



Ні.

Наприклад, коло на малюнку 21 не може задавати функцію, оскільки існують такі значення незалежної змінної x , наприклад, $x = 1$, яким відповідає два значення залежної змінної y .

Уважають, що *функцію заданою графічно* в прямокутній системі координат, якщо в цій системі координат зображення містить принаймні одну точку і на ньому немає двох точок з рівними абсцисами, але різними ординатами.



Мал. 21

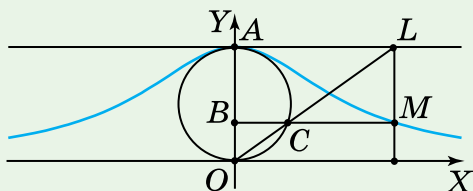
Дізнайтеся більше

Марія Гаетана Аньезі (1718–1799) — італійська вчена, математикиня і філософиня, яка вважається першою жінкою — професоркою математики у світі. Марія стала експерткою в галузі математичного аналізу, що є основою сучасної математики. У 1748 році вона опублікувала книгу «Основи аналізу для користування італійською молоддю», яка стала класичним підручником з математики.



Відома крива третього порядку $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ (мал. 22), яку досліджувала Марія Аньезі й названа «локоном Аньезі» на її честь.

qr.orioncentr.com.ua/GIJOg



Мал. 22

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/m5UVg

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
графік функції	graph of function	Graph einer Funktion	représentation graphique d'une fonction

Пригадайте головне

1. Що називають координатною площиною?
2. Які координати має точка, що лежить на осі абсцис; на осі ординат?
3. Які координати має початок координат?
4. Що називають графіком функції?
5. Як побудувати графік функції?
6. Як визначити, чи належить точка графіку функції?
7. Як знайти точки перетину графіка функції з осями координат?
8. Чи будь-яка геометрична фігура може бути графіком функції?

Усне тренування

Обчисліть:

$$1) \frac{1}{2} \cdot 2 + 5; \quad \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot 8; \quad 1 \frac{1}{2} : \frac{1}{2} - 7; \quad 2 \frac{1}{2} \cdot (7 - 3^2);$$

$$2) -3^2 + 4 \cdot 1,5; \quad (-3)^2 + 0,5 \cdot (-4);$$

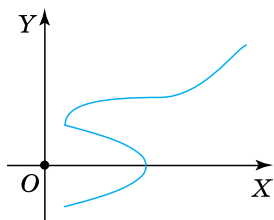
$$-(3^2 + 4 \cdot 2,5); \quad (-3^2 + 5) \cdot 2,5.$$

Розв'яжіть задачі

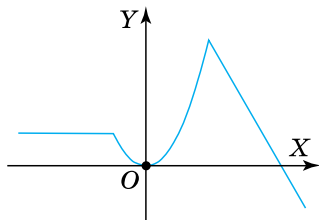
- 656'. Дано точку $A(-3; 7)$. Чи правильно, що абсциса точки A дорівнює:
1) -3 ; 2) 3 ; 3) -7 ; 4) 7 ?
- 657'. Дано точку $A(-3; 7)$. Чи правильно, що ордината точки A дорівнює:
1) -3 ; 2) 3 ; 3) -7 ; 4) 7 ?
- 658'. На якій осі лежить точка:
1) $A(-5; 0)$; 2) $B(0; 3,2)$; 3) $C\left(5\frac{3}{5}; 0\right)$; 4) $D\left(0; -1\frac{6}{7}\right)$?

659'. Чи може бути графіком деякої функції лінія, зображена:

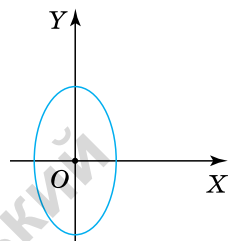
- 1) на малюнку 23; 3) на малюнку 25?
2) на малюнку 24;



Мал. 23



Мал. 24



Мал. 25

660'. Чи правильно, що точка $O(0; 0)$ належить графіку функції:

- 1) $y = 3x - 3$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = -x^2$?

661'. Які з даних точок



$A(-4, 5; 0)$, $B(8, 0; 3; 1, 05)$,
 $C(0, 6; 3, 1)$, $D(0; -1, 77)$,

$E\left(5\frac{2}{7}; 0\right)$, $M(0; 0)$,

$F(0, 3; 0)$, $K\left(0; -1\frac{1}{7}\right)$,

$L(0, 33; 0, 66)$ лежать на осі: 1) абсцис; 2) ординат?



qr.orioncentr.com.ua/zLW96

662'. Накресліть систему координат. На осі OX позначте точки з абсцисами: 1) 2,5; 2) $-3,5$; 3) 5; 4) $-1,5$. Запишіть координати цих точок.

663'. Накресліть систему координат. На осі OY позначте точки з ординатами: 1) 3; 2) $-0,5$; 3) 3,5; 4) -4 . Запишіть координати цих точок.

664'. Задайте прямокутну систему координат на площині та побудуйте в ній точки: $A(2; 1)$, $B(2; -1)$, $C(-1, 5; 3, 5)$, $D(3; -2, 5)$, $E(3; 3)$, $F(4; 3)$, $G(-3; -4)$, $H(-4; -3)$. Побудуйте прямі AC , DG , EH , BF .

665°. Накресліть систему координат. За одиничний відрізок прийміть довжину п'яти клітинок зошита. Побудуйте точки $K(-1,4; -1,2)$, $L(-1,4; 0,6)$, $M(-1,6; -0,8)$, $N(0,6; -1)$. Побудуйте прямі KM , LM , LN .

666°. Функцію задано формулою: $y = -x^2 + 2$. Заповніть таблицю 27.

Таблиця 27

x	-2	-1	0	1	2
y					

Скориставшись даними таблиці, побудуйте графік даної функції.

667°. Функцію задано формулою: $y = 2x^2 - 1$. Заповніть таблицю 28.

Таблиця 28

x	-2	-1	0	1	2
y					

Скориставшись даними таблиці, побудуйте графік даної функції.

668°. Чи належить графіку функції $y = -x^2 - 3$ точка:



- 1) $A(-1; -4)$;
- 2) $B(1; 4)$;
- 3) $C(0; 3)$;
- 4) $D(-2; -5)$?



qr.orioncentr.com.ua/4lLsC

669°. Чи належить графіку функції $y = 4 - x^2$ точка:
1) $K(-1; 3)$; 2) $L(1; -3)$; 3) $M(2; 0)$; 4) $N(-2; 6)$?

670°. Чи перетинає вісь абсцис графік функції:

- 1) $y = 2x^2 + 3$; 2) $y = -3x^2 - 4$; 3) $y = \frac{7}{2x-3}$?

671°. У якій точці перетинає вісь OY графік функції:

- 1) $y = 4x - 4$; 2) $y = -3x^2 + 3$; 3) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{12}$?

672°. У яких точках перетинає осі координат графік функції:

1) $y = 5x - 15$; 2) $y = -x^2 + 9$; 3) $y = -\frac{2}{11}x + \frac{7}{33}$?

673. Запишіть координати точки M , якщо з точкою $N(-5, 5; 4, 2)$ вона має:

- 1) рівні абсциси, але протилежні ординати;
- 2) рівні ординати, але протилежні абсциси;
- 3) протилежні абсциси й протилежні ординати;
- 4) рівні абсциси й рівні ординати.

674. Дано точку $D(4, 8; -1, 5)$. Запишіть координати точки C , якщо її абсциса й ордината:

- 1) протилежні до відповідних координат точки D ;
- 2) утричі менші від абсциси й ординати точки D ;
- 3) на 1,3 більші за абсцису й ординату точки D .

675. Побудуйте пряму MN , якщо $M(1; 1)$, $N(3; 3)$. Визначте координати ще чотирьох точок цієї прямої.

676. Побудуйте пряму PQ , якщо $P(-3, 5; 3, 5)$, $Q(2; -2)$. Визначте координати ще чотирьох точок цієї прямої.

677. Графік функції $y = x^2 + n$ проходить через точку $N(-2; 6)$. Знайдіть значення n .

678. Графік функції $y = m - 2x^2$ проходить через точку $N(-1; 3)$. Знайдіть значення m .

679. Графік функції $y = ax - 1$ проходить через точку $A\left(-1; -1\frac{2}{3}\right)$. Знайдіть значення a .

680. Побудуйте графік функції:

1) $y = 0,5x^2 - 1,5$, якщо $-3 \leq x \leq 3$;

2) $y = \frac{5x+2}{3}$, якщо $-2 \leq x \leq 1$;

3) $y = -\frac{4}{7}x + 1$, якщо $-7 \leq x \leq 7$;

4) $y = 2x - 1$, якщо $-3 \leq x \leq 1$.

681. Побудуйте графік функції:

1) $y = -1,5x^2 + 3$, якщо $-2 \leq x \leq 1$;

2) $y = \frac{3x-2}{4}$, якщо $-2 \leq x \leq 3$.

682*. Побудуйте графіки функцій $y = |x|$ та $y = -x^2 + 2$. Знайдіть координати точок перетину цих графіків.

683*. Побудуйте множину точок $M(x; y)$, якщо:

1) $-3 \leq x < 1$, $y = 2$; 2) $-2 \leq y < 2$, $x = 1$.

684*. Побудуйте множину точок $Q(x; y)$, якщо:

1) $-2 \leq x < 1,5$, $-2 \leq y < 1,5$;

2) $-4 \leq y < -2$, $-3 \leq x < -1$.

685*. Побудуйте всі точки $P(x; y)$ такі, що $|x| \leq 2$, $|y| \leq 5$ і:

1) ордината точки P протилежна до її абсциси;

2) модуль ординати точки P дорівнює її абсцисі;

3) абсциса точки P удвічі менша від її ординати.

686*. Побудуйте графіки функцій:

1) $y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } -3 \leq x < -1, \\ x^2, & \text{якщо } -1 \leq x < 2, \\ 4, & \text{якщо } 2 \leq x \leq 5; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} -3, & \text{якщо } -4 \leq x < -2, \\ -x^2 + 1, & \text{якщо } -2 \leq x < 1, \\ x - 1, & \text{якщо } 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$

Проявіть компетентність



687. У понеділок до магазину завезли 5 ящиків цукерок «Ромашка» по 10 кг у кожному. Щодня магазин продає 6,5 кг цукерок. Запишіть у вигляді формули залежність маси цукерок, що залишились у магазині, від дня тижня. Визначте, скільки кілограмів цукерок залишиться в магазині в середу, у п'ятницю та в неділю. Побудуйте графік отриманої функції.

688. Побудуйте графік зміни температури за будь-який день тижня, знімаючи покази через кожні дві години. З'ясуйте:



- 1) у який час дня температура була найвищою;
- 2) у який час дня температура була найнижчою;
- 3) коли в цей день температура знижувалась;
- 4) коли в цей день температура підвищувалась.

§ 17. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

1. Що таке лінійна функція

Ситуація. Мобільний оператор пропонує своїм клієнтам тариф «Економний» за такими умовами: безлімітні дзвінки в мережі за 30 грн і додаткова плата 2 грн за хвилину розмови на інші мережі. Дмитро склав формулу залежності загальної вартості тарифного плану y від кількості хвилин x на інші мережі:



qr.orioncentr.com.ua/frKlG

$$y = 30 + 2x.$$



Чи правильно Дмитро задав функцію формулою?

Так.



Отриману функцію в загальному вигляді можна задати формулою:

$$y = kx + b,$$

де x — незалежна змінна, k і b — деякі числа.

Запам'ятайте!

Функція, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x — аргумент, k і b — деякі числа, називається лінійною функцією.



У лінійної функції:

область визначення — усі числа,

область значень — усі числа.

2. Графік лінійної функції

Задача 1 Побудуйте графік функції $y = 2x + 1$.

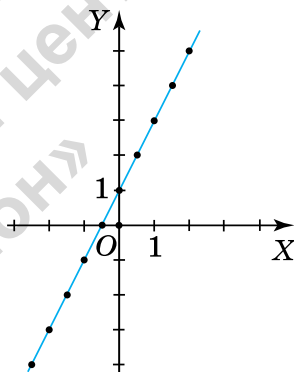
Розв'язання Дана функція є лінійною за означенням. Область її визначення — усі числа. Складемо таблицю значень цієї функції (табл. 29).

Таблиця 29

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$y(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Побудуємо ці точки на координатній площині та з'єднаємо їх суцільною лінією (мал. 26). Ця лінія і є графіком даної функції.

Переконайтеся самостійно, що всі точки графіка лінійної функції на малюнку 26 лежать на одній прямій (цей факт ви зможете строго довести в старшій школі).



Мал. 26

Запам'ятайте!

Графіком лінійної функції є пряма.



Скільки значень лінійної функції треба знайти, щоб побудувати її графік?



Два.

Для побудови прямої достатньо двох точок. Цей факт вам відомий із курсу геометрії.

Задача 2 Побудуйте графік функції $y = 3x - 2$.

Розв'язання

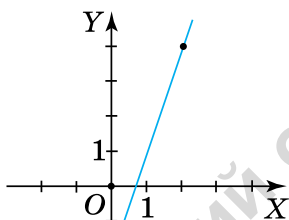
Дана функція є лінійною.

Складемо таблицю значень даної функції для двох довільних значень аргументу, наприклад, 0 і 2 (табл. 30).

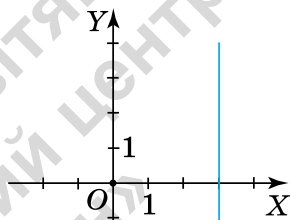
Таблиця 30

x	0	2
$y(x)$	-2	4

На координатній площині позначимо точки з координатами $(0; -2)$ і $(2; 4)$. Проведемо через них пряму. Ця пряма і є графіком даної функції (мал. 27).



Мал. 27



Мал. 28



Чи можна вважати графіком лінійної функції пряму, перпендикулярну до осі абсцис (мал. 28)?

Ні.

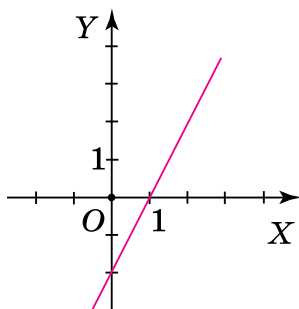


На такій прямій одному значенню x відповідає безліч значень y . Наприклад, усі точки прямої на малюнку 28 мають координати $(3; y)$, де y — будь-яке число.

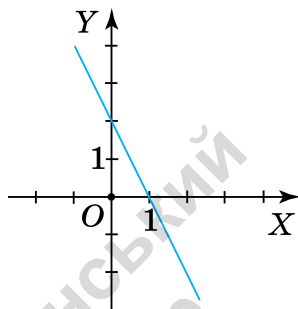
Запам'ятайте!

Кожна пряма, яка не перпендикулярна до осі абсцис, є графіком лінійної функції.

Задача 3 За графіками функцій $y = 2x - 2$ (мал. 29) і $y = -2x + 2$ (мал. 30) знайдіть усі значення аргументу, за яких значення функції: а) дорівнює нулю; б) є додатним; в) є від'ємним.



Мал. 29



Мал. 30

Розв'язання

1. За малюнком 29 для функції $y = 2x - 2$ отримаємо:

а) $y = 0$, якщо $x = 1$;

б) $y > 0$, якщо $x > 1$;

в) $y < 0$, якщо $x < 1$.

2. За малюнком 30 для функції $y = -2x + 2$ отримаємо:

а) $y = 0$, якщо $x = 1$;

б) $y > 0$, якщо $x < 1$;

в) $y < 0$, якщо $x > 1$.

3. Особливості графіка лінійної функції

qr.orioncentr.com.ua/73zWQ



Чи характеризує лінійну функцію число k ?

Так.



Наприклад, у функції $y = 2x - 2$ (мал. 29) коефіцієнт $k > 0$ і її графік утворює з додатним променем осі OX **гострий кут**, а у функції $y = -2x + 2$ (мал. 30) коефіцієнт $k < 0$ і її графік утворює з додатним променем осі OX **тупий кут**.

Запам'ятайте!

Графік функції $y = kx + b$ утворює з додатним променем осі OX :

- гострий кут, якщо $k > 0$;
- тупий кут, якщо $k < 0$.



Оскільки коефіцієнт k характеризує кут, який пряма утворює з додатним променем осі OX , його називають *кутовим коефіцієнтом* прямої.



Чи характеризує лінійну функцію число b ?

Так.



Число b у формулі $y = kx + b$ показує ординату точки перетину графіка лінійної функції з віссю OY .

Графік функції $y = 2x - 2$ перетинає вісь OY у точці з **ординатою -2** (мал. 29), а $y = -2x + 2$ перетинає вісь OY у точці з **ординатою 2** (мал. 30).

Запам'ятайте!

Графік лінійної функції $y = kx + b$ перетинає вісь OY в точці:

- з додатною ординатою, якщо $b > 0$;
- з від'ємною ординатою, якщо $b < 0$;
- з ординатою, що дорівнює 0 , якщо $b = 0$.

На малюнку 31 більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Отже, функція $y = 2x - 2$ є **зростаючою**. У неї $k > 0$.

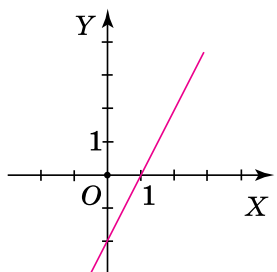
На малюнку 32 більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Отже, функція $y = -2x + 2$ є **спадною**. У неї $k < 0$.

На малюнку 33 зображено графік лінійної функції $y = 2$. У неї $k = 0$.

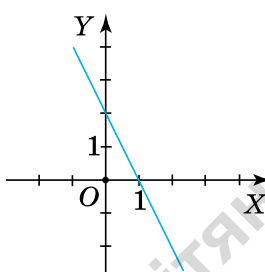
Запам'ятайте!

Лінійна функція $y = kx + b$:

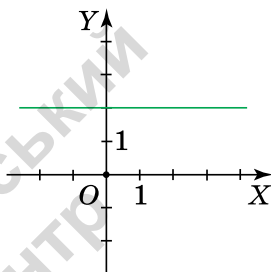
- **зростає**, якщо $k > 0$;
- **спадає**, якщо $k < 0$;
- є **сталою**, якщо $k = 0$.



Мал. 31



Мал. 32



Мал. 33

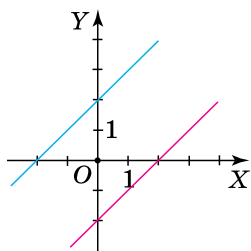
Дізнайтеся більше

Нехай задано дві лінійні функції: $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$.

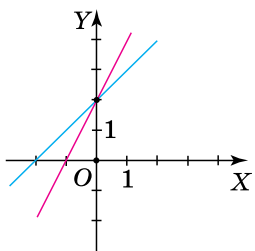
1. Якщо $k_1 = k_2$ і $b_1 = b_2$, то графіки даних функцій **збігаються**.
2. Якщо $k_1 = k_2$, а $b_1 \neq b_2$, то графіки даних функцій **паралельні**.
Наприклад, паралельними є графіки функцій $y = x + 2$ і $y = x - 2$ (мал. 34).

3. Якщо $k_1 \neq k_2$, то графіки даних функцій **перетинаються**.
Наприклад, графіки функцій $y = x + 2$ і $y = 2x + 2$ перетинаються в точці $A(0; 2)$ (мал. 35).

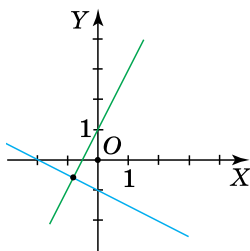
4. Особливим є випадок, коли $k_1 \cdot k_2 = -1$, тоді графіки даних функцій **взаємно перпендикулярні**. Наприклад, графіки функцій $y = 2x + 1$ і $y = -0,5x - 1$ є взаємно перпендикулярними (мал. 36).
У цих функцій $k_1 \cdot k_2 = 2 \cdot (-0,5) = -1$.



Мал. 34



Мал. 35



Мал. 36

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/5HNrO

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
лінійна функція	linear function	lineare Funktion	fonction linéaire

Пригадайте головне

1. Яка функція називається лінійною?
2. Що є графіком лінійної функції?
3. Скільки значень лінійної функції треба знайти, щоб побудувати її графік?
4. Як побудувати графік лінійної функції?
5. Як характеризує лінійну функцію число k ?
6. Як характеризує лінійну функцію число b ?
7. За яких значень k лінійна функція $y = kx + b$ є зростаючою; спадною; сталою?

Усне тренування

Обчисліть:

$$\begin{aligned}
 &1) 4 \cdot 1\frac{1}{4}; \quad 1,5 : \frac{1}{2}; \quad 10,5 - 3\frac{1}{2}; \quad 4,25 + 1\frac{3}{4}; \\
 &2) 12\frac{1}{2} : 6\frac{1}{4}; \quad -8,5 - 2\frac{1}{2}; \quad 0,75 \cdot 1\frac{1}{3}; \quad -2\frac{1}{2} + 6,5.
 \end{aligned}$$

Розв'яжіть задачі

689'. Чи є лінійною функція, яку задано формулою:

1) $y = 2x^2 + x + 1$; 2) $y = 2 + x^3$; 3) $y = 4 - 5x$?

690'. Чи правильно, що графік функції $y = 3x - 2$ проходить через точку:

1) $A(2; 2)$; 2) $B(-2; -4)$; 3) $C(1; 1)$?

691'. Чи правильно, що:



- 1) функція $y = -3x + 3$ зростає;
2) функція $y = 2$ спадає;


qr.orioncentr.com.ua/BAmcv

- 3) функція $y = 5x - 1$ спадає;
- 4) функція $y = 4x - 3$ зростає;
- 5) функція $y = -6x + 2$ спадає;
- 6) функція $y = 4x$ зростає;
- 7) функція $y = -0,5$ є сталою;
- 8) графік функції $y = 4x - 5$ перетинає вісь OY у точці $(0; -5)$;
- 9) графік функції $y = -2x + 5$ перетинає вісь OY у точці $(0; -2)$;
- 10) графік функції $y = 0,5x + 6$ утворює гострий кут з додатним променем осі OX ?

692'. Відомо, що графік функції $y = kx + b$ перетинає вісь OY в точці $A(0; -3)$. Яким у такому випадку буде значення b :

- 1) додатним; 2) від'ємним; 3) рівним нулю?

693'. Назвіть кутовий коефіцієнт прямої:

- 1) $y = 3x - 7$; 2) $y = 4 - 0,5x$; 3) $y = \frac{1}{6}x + \frac{2}{5}$.

694°. Функцію задано формулою $y = 2x - 5$. Накресліть у зошиті таблицю 31 та заповніть її.



Таблиця 31

x	-2	-1	0	1	2
y					



qr.orioncentr.com.ua/p9Tyr

695°. Функцію задано формулою $y = -x + 3$. Накресліть у зошиті таблицю 32 та заповніть її.

Таблиця 32

x	-2	-1	0	1	2
y					

696°. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x - 1$; 3) $y = -3x + 1$; 5) $y = -3$;
 2) $y = -2x - 1$; 4) $y = \frac{1}{2}x + 2$; 6) $y = 4$.

697°. Побудуйте графік функції:

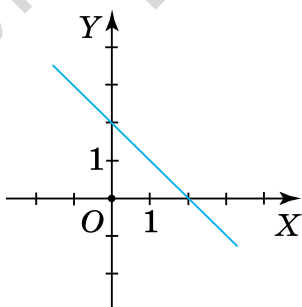
1) $y = 2x + 1$; 2) $y = -3x - 1$; 3) $y = \frac{1}{3}x - 1$; 4) $y = -1$.

698°. На малюнку 37 зображено графік деякої лінійної функції. Скориставшись графіком, знайдіть:

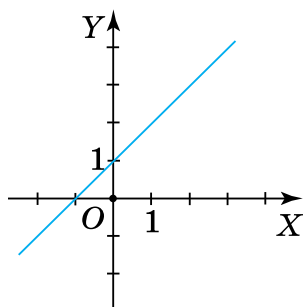
- 1) значення y , якщо $x = -1; 0; 1; 2,5$;
- 2) значення x , за якого $y = 0$;
- 3) три значення аргументу, за яких значення функції додатне;
- 4) три значення аргументу, за яких значення функції від'ємне;
- 5) значення аргументу, за яких функція зростає;
- 6) значення аргументу, за яких функція спадає.

699°. На малюнку 38 зображено графік деякої лінійної функції. Скориставшись графіком, знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -1; 0; 1; 2,5$;
- 2) значення x , за якого $y = 0$;
- 3) три значення аргументу, за яких значення функції додатне;
- 4) три значення аргументу, за яких значення функції від'ємне;
- 5) значення аргументу, за яких функція зростає;
- 6) значення аргументу, за яких функція спадає.

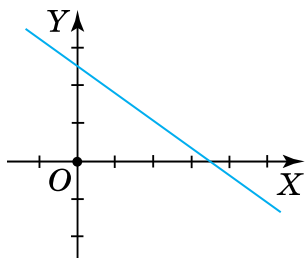


Мал. 37

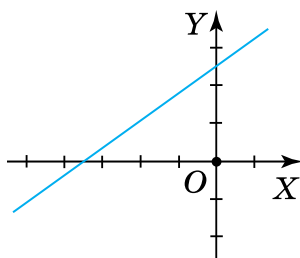


Мал. 38

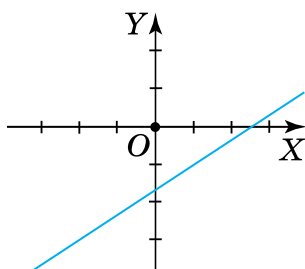
700°. За видом графіка функції $y = kx + b$ на малюнках 39–42 визначте знаки коефіцієнтів k і b .



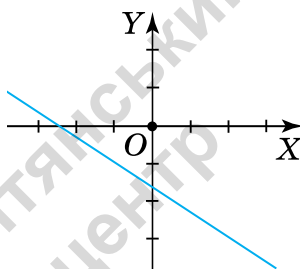
Мал. 39



Мал. 40



Мал. 41



Мал. 42

701°. Графік якої з функцій перетинає вісь ординат у точці з додатною ординатою:

- 1) $y = 6x - 5$; 3) $y = -6x - 5$; 5) $y = -6x + 5$;
 2) $y = -6x + 5$; 4) $y = 6x + 5$; 6) $y = 5$?

702°. Графік якої з функцій перетинає вісь ординат у точці з від'ємною ординатою:

- 1) $y = -7x - 6$; 3) $y = 7x - 6$;
 2) $y = -7x + 6$; 4) $y = 7x + 6$?

703°. У якій точці перетинає вісь ординат графік функції:

- 1) $y = 2x - 3$; 3) $y = -\frac{2}{5}x + \frac{8}{15}$; 5) $y = 4x$;
 2) $y = -3x + 9$; 4) $y = 1,5x - 3$; 6) $y = \frac{1}{2}x - \frac{2}{5}$?

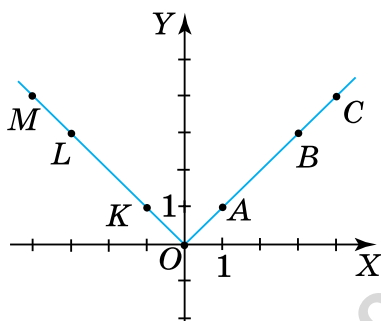
704°. У якій точці перетинає вісь абсцис графік функції:

- 1) $y = 3x - 12$; 4) $y = 1,5x + 9$;
 2) $y = -7x + 21$; 5) $y = -12x$;
 3) $y = -\frac{7}{9}x - \frac{14}{27}$; 6) $y = \frac{3}{5}x - 0,6$?

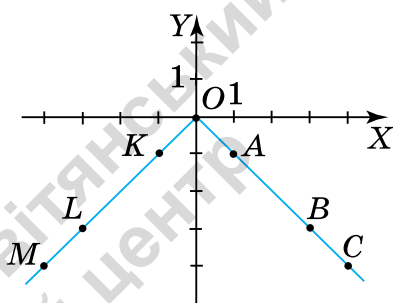
705°. У яких точках перетинає осі координат графік функції: 1) $y = -5x - 10$; 2) $y = 0,4x - 2,6$?

706°. На малюнках 43–44 зображено графіки деяких функцій. Серед точок, позначених на графіку, укажіть:

- 1) точки з рівними абсцисами й ординатами;
- 2) пари точок з протилежними абсцисами й рівними ординатами.



Мал. 43



Мал. 44

Яку закономірність помітили? Чи задовольняють координати точок кожної пари функцію, задану формулою: а) $y = |x|$; б) $y = -|x|$?

707°. Якому з графіків функцій $y = |x|$ чи $y = -|x|$ належить точка з координатами: 1) $(-2; -2)$; 2) $(1; -1)$; 3) $(-1; 1)$; 4) $(-1; -1)$; 5) $(-0,3; 0,3)$; 6) $(1,5; 1,5)$?

708°. Графік функції $y = 4x + t$ проходить через точку $M(-2; 8)$. Знайдіть значення t .

709°. Графік функції $y = bx - 1$ проходить через точку $B\left(-1; -\frac{3}{5}\right)$. Знайдіть значення b .

710. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 0,5x - 1,5$; 2) $y = -\frac{2x+1}{3}$; 3) $y = \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}$.

Скориставшись графіком, знайдіть усі значення аргументу, за яких значення функції: а) дорівнює нулю; б) є додатним; в) є від'ємним.

711. Побудуйте графік функції:

$$1) y = -1,5x + 3; \quad 2) y = \frac{3-2x}{5}; \quad 3) y = 1\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Скориставшись графіком, знайдіть усі значення аргументу, за яких значення функції: а) дорівнює нулю; б) є додатним; в) є від'ємним.

712. Побудуйте графіки двох функцій в одній системі координат:

$$1) y = 2x - 1 \text{ і } y = -5x + 6; \quad 2) y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \text{ і } y = \frac{x}{2} + 3.$$

Визначте графічно координати їх точок перетину.

713. Побудуйте графіки двох функцій в одній системі координат:

$$1) y = 3x - 1 \text{ і } y = -2x + 4; \quad 2) y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5} \text{ і } y = \frac{x}{5} - 1\frac{2}{5}.$$

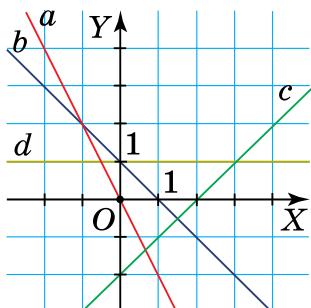
Визначте графічно координати їх точок перетину.

714. Графік функції $y = ax + b$ проходить через точки $A(-1; -3)$ і $B(0; 2)$. Знайдіть значення a і b .

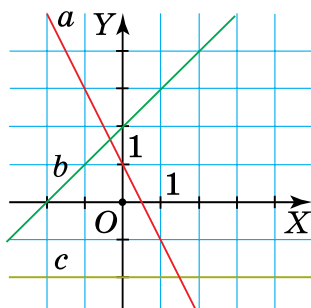
715. Задайте формулами функції, графіки яких зображено на малюнку 45.

716. Задайте формулами функції, графіки яких зображено на малюнку 46.

717. Графік функції $y = kx + b$ проходить через точку $A(-1; -10)$, а його кутовий коефіцієнт дорівнює НСД чисел 42 і 91. Знайдіть значення k і b .



Мал. 45



Мал. 46

- 718.** Графік функції $y = ax + c$ проходить через точку $B(1; 14)$, а його кутовий коефіцієнт дорівнює НСД чисел 96 і 112. Знайдіть значення a і c .
- 719.** За яких значень t графік функції $y = (2 - 3t)x + 5$ спадає?
- 720.** За яких значень t графік функції $y = (1 + 2t)x - 7$ зростає?
- 721*.** За якого значення k є паралельними графіки функцій:
- $$y = (2k + 2)x - 201,$$
- $$y = (3k - 3)x + 202?$$

- 722*.** Графік функції $y = ax + b$ перпендикулярний до графіка функції $y = 4x + 1$ і проходить через точку $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Знайдіть значення a і b .

- 723*.** Побудуйте графік функції:

$$1) y = |x| + x; \quad 3) y = |x| - x;$$

$$2) y = 2|x| - x; \quad 4) y = \frac{|x|}{x}.$$

- 724*.** Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} x - 2, & \text{якщо } x \leq -1, \\ 3x, & \text{якщо } -1 \leq x < 2, \\ x + 4, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

Проявіть компетентність



- 725.** Ірина входить до шкільної команди з легкої атлетики. Під час тренувань зі стрибків у довжину тренер нараховує 5 балів за приземлення біля ближньої межі та 10 балів за приземлення за дальньою межею. Складіть формулу для обчислення загальної кількості балів Ірини, якщо вона виконала 7 стрибків і x разів приземлилась за дальню межу. Побудуйте графік отриманої функції.

§ 18. ПРЯМА ПРОПОРЦІЙНІСТЬ

1. Що таке пряма пропорційність

Ситуація. Учитель фізкультури Іван Степанович провів недільний похід з учнями. Туристи рухалися зі сталою швидкістю 4,5 км/год, тому пройдена відстань s залежала тільки від часу t . Учні подали це формулою: $s = 4,5t$.



qr.orioncentr.com.ua/p4ji1



Як змінювалась відстань залежно від часу?

Прямо пропорційно.



Відстань і час на її подолання за сталої швидкості є прямо пропорційними величинами, оскільки *відношення* відстані до часу *не змінюється*. У розглянутій ситуації це відношення дорівнює 4,5 км/год.

Запам'ятайте!

Функція, яку можна задати формулою виду $y = kx$, де x — аргумент, $k \neq 0$, називається *прямою пропорційністю*.



Якщо $k = 0$, то функція $y = kx$ набуває вигляду: $y = 0$. Вона є *сталою функцією*, а тому не може бути прямою пропорційністю.

2. Графік прямої пропорційності



Чи є пряма пропорційність різновидом лінійної функції?

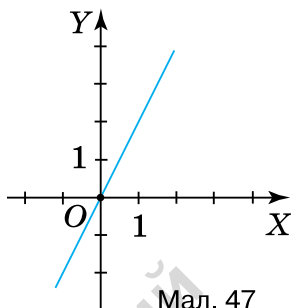
Так.



Якщо у функції $y = kx + b$ коефіцієнт $b = 0$, то одержимо функцію $y = kx$. Тому пряма пропорційність є різновидом лінійної функції.

Запам'ятайте!

Графіком прямої пропорційності є пряма, що проходить через початок координат і не збігається з осями координат.



Мал. 47

Справді, пара чисел $(0; 0)$ задовольняє формулу $y = kx$. Тому графік прямої пропорційності проходить через початок координат (мал. 47). Графік прямої пропорційності не може збігатися ані з віссю OX , оскільки $k \neq 0$ (за означенням), ані з віссю OY , оскільки формула $x = 0$ не задає функцію.

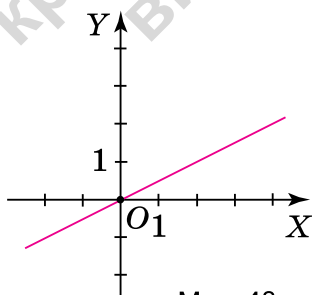
Задача Побудуйте графіки функцій $y = 0,5x$ і $y = -0,5x$.

Розв'язання

Кожна з даних функцій — пряма пропорційність, графіком якої є пряма. Побудуємо ці прямі.

$$y = 0,5x \text{ (мал. 48)}$$

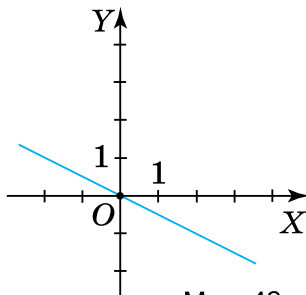
x	0	2
y	0	1



Мал. 48

$$y = -0,5x \text{ (мал. 49)}$$

x	0	2
y	0	-1



Мал. 49



Графік функції $y = kx$ утворює з додатним променем осі OX :

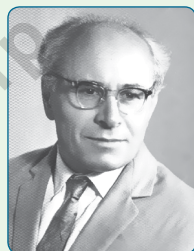
- **гострий кут**, якщо $k > 0$;
- **тупий кут**, якщо $k < 0$.

Запам'ятайте!**Властивості функції $y = kx$:**

- 1) область визначення — усі числа;
- 2) область значень — усі числа;
- 3) функція зростає, якщо $k > 0$;
- 4) функція спадає, якщо $k < 0$;
- 5) графіком є пряма;
- 6) графік не може збігатися з осями координат.

Дізнайтеся більше

Дзядик Владислав Кирилович (1919–1998) — український математик, доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України, Соросівський професор. Народився в смт Сахновщина Харківської області. У 1963 році створив відділ теорії функцій Інституту математики. В. К. Дзядик довгий час працював переважно в галузі теорії функцій. Розробив спеціальні математичні методи та перетворення, які названо на його честь «методи Дзядика» і «перетворення Дзядика».



qr.orioncentr.com.ua/jBTIL

Словничок

qr.orioncentr.com.ua/ZiUEq

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
пряма пропорційність	direct proportionality	direkte Proportionalität	proportionnalité directe

Пригадайте головне

1. Яка функція називається прямою пропорційністю?
2. Назвіть властивості прямої пропорційності.
3. Що є графіком прямої пропорційності?
4. Які властивості графіка прямої пропорційності?
5. Що таке кутівий коефіцієнт? Що він показує?

Усне тренування

Порівняйте з нулем значення виразів:

- 1) $(-2,5 + 2^2) \cdot (-3)$; $(8 - 4 \cdot 2,2) \cdot 5$; $(3^2 - 4 \cdot 2,2) \cdot (-2)$;
 2) $(-3)^2 - 3^2$; $(-4)^2 + 4^2$; $-5^2 - 5^2$; $-6^2 + 6^2$.

Розв'яжіть задачі

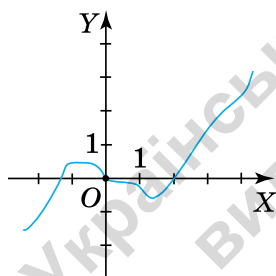
726'. Чи правильно, що функція є прямою пропорційністю:

- 1) $y = -x + 2$; 3) $y = -2$;
 2) $y = 3x$; 4) $y = -2 + 3x$?

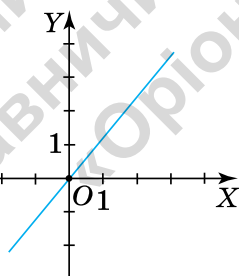
727'. Чи правильно, що функція $y = kx + b$ є прямою пропорційністю, якщо:

- 1) $k = 0$; 3) $k = 1$;
 2) $b = 0, k \neq 0$; 4) $b = 1$?

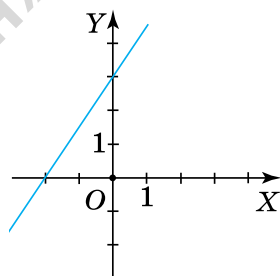
728'. На якому з малюнків 50–52 зображено графік прямої пропорційності?



Мал. 50



Мал. 51



Мал. 52

729'. Чи правильно, що точка $O(0; 0)$ належить графіку функції:

- 1) $y = 3x - 3$; 2) $y = 2x$; 3) $y = 5$?

730'. На малюнку 53 зображено графік прямої пропорційності. Скориставшись графіком, знайдіть:

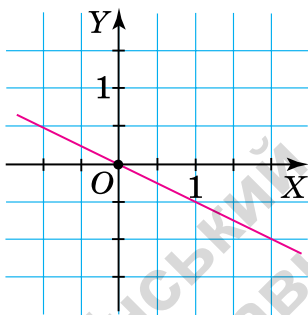
- 1) значення y , якщо $x = -1; 0; 1; 1,5$;
 2) значення x , за якого $y = 0$;
 3) три значення аргументу, за яких значення функції додатне;

4) три значення аргументу, за яких значення функції від'ємне.

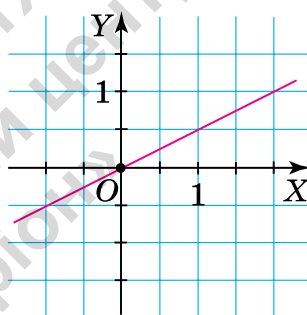
Чому дорівнює кутовий коефіцієнт даної функції? Чи існує така точка на графіку даної функції, у якої ордината дорівнює абсцисі?

731°. На малюнку 54 зображено графік прямої пропорційності. Скориставшись графіком, знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -1,5; -1; 0; 1$;
- 2) значення x , за якого $y = 0$;
- 3) три значення аргументу, за яких значення функції додатне;
- 4) три значення аргументу, за яких значення функції від'ємне.



Мал. 53



Мал. 54

732°. Функцію задано формулою $y = 3x$. Накресліть у зошиті таблицю 33 та заповніть її.

Таблиця 33

x	-2	-1	0	1	2
y					

733°. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x$;
- 2) $y = -3x$;
- 3) $y = 0,25x$;
- 4) $y = -\frac{2}{3}x$;
- 5) $y = \frac{1}{2}x$;
- 6) $y = -\frac{3}{4}x$.

734°. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 4x$;
- 2) $y = -2x$.

735°. Чи проходить через початок координат графік функції:

1) $y = 5x - 1$;

3) $y = 1$;

2) $y = -3x + 1$;

4) $y = -\frac{7}{12}x$?

736°. Чи належить графіку



функції $y = \frac{5}{6}x$ точка:

1) $A(3; -2,5)$;

2) $B(6; 1)$;

3) $C(6; 5)$;

4) $D(12; 10)$;

5) $E(0,2; 1)$?



qr.orioncentr.com.ua/cjxFU

737°. Чи належить графіку функції $y = -1,3x$ точка:

1) $K(-1; 1,3)$;

3) $M(3; 3,9)$;

2) $L(1; 1,3)$;

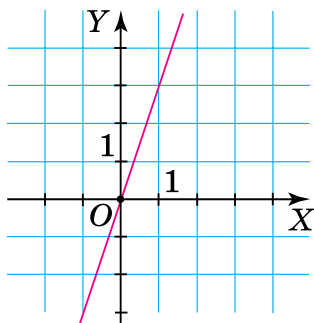
4) $N(-3; 3,9)$?

738°. Яка з точок $M(-1; -0,4)$, $N(1; -0,4)$, $P(5; 2)$, $R(-5; 2)$ належить графіку функції $y = -0,4x$?

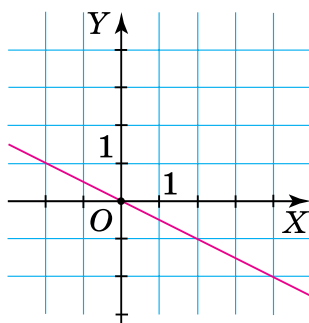
739°. Графік функції $y = nx$ проходить через точку $M(-2; 5)$. Знайдіть значення n .

740°. Графік функції $y = bx$ проходить через точку $B\left(-1; \frac{4}{7}\right)$. Знайдіть значення b .

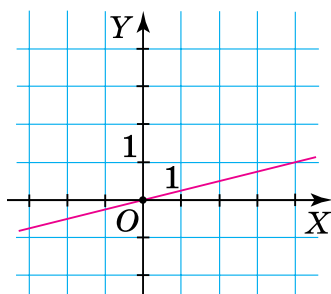
741. Задайте формулою функції, графіки яких зображено на малюнках 55–57:



Мал. 55



Мал. 56



Мал. 57

- 742.** Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку $M\left(-\frac{3}{11}; \frac{5}{33}\right)$. Побудуйте графік отриманої функції.
- 743.** Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку, ордината якої втричі менша від абсциси. Побудуйте графік отриманої функції.
- 744.** Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку, абсциса якої у 8 разів більша за ординату. Побудуйте графік отриманої функції.
- 745.** Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її кутовий коефіцієнт є числом, протилежним до середнього арифметичного всіх двоцифрових чисел, кратних числу 5 і менших від числа 42. Побудуйте графік отриманої функції.
- 746.** Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її кутовий коефіцієнт є числом, протилежним до середнього арифметичного всіх двоцифрових чисел, кратних числу 9 і менших від числа 55. Побудуйте графік отриманої функції.
- 747*.** Побудуйте графік функції:
 1) $y = 2|x|$; 2) $y = -4|x| - x$; 3) $y = 3|1 - x| - 3x - 3$.

748*. Задайте формулою функцію, графік якої проходить через початок координат і точку перетину графіків функцій $y = |x - 2|$ і $y = 4 - x$. Побудуйте графік отриманої функції.

749*. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

$$1) y = \frac{2x^2 - 6x}{x - 3}; \quad 2) y = \frac{-3x^2 - 6x}{x + 2}.$$

Проявіть компетентність

750. Щодня магазин продає товару на суму 8000 грн.



Запишіть у вигляді формули залежність кількості грошей, одержаних за проданий товар, від кількості робочих днів.

751. Щоб покласти 1 м^2 плитки, майстер використо-

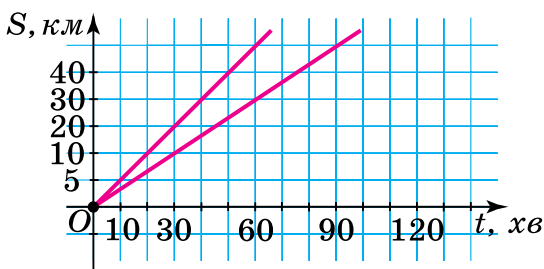


вує 2 кг будівельного клею. Задайте формулою залежність маси клею від площі стіни, яку треба облицювати плиткою. Скільки кілограмів клею знадобиться для облицювання у ванній кімнаті трьох стін прямокутної форми з розмірами $2,5 \text{ м} \times 3 \text{ м}$ кожна?

752. За графіками руху двох велосипедистів (мал. 58) з'ясуйте:



- 1) тривалість руху кожного велосипедиста;
- 2) яка була відстань між велосипедистами через 30 хв, 1 год.



Мал. 58

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 4**КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

1. Поясніть, як побудувати прямокутну систему координат на площині.
2. Яку назву мають осі координат; точка їх перетину?
3. Що називають координатною площиною?
4. Поясніть, як визначити координати точки.
5. Які координати має початок координат?
6. На скільки координатних чвертей розбивають площину координатні осі?
7. Сформулюйте означення функції.
8. Що називають аргументом функції?
9. Що таке область визначення функції?
10. Що таке область значень функції?
11. Назвіть способи задання функцій.
12. Що називають графіком функції?
13. Чи будь-яка лінія на площині може бути графіком функції?
14. Як побудувати графік функції?
15. Як визначити, чи належить точка графіку функції?
16. Поясніть, яку функцію називають зростаючою? Спадаючою?
17. Яка функція називається лінійною?
18. Що є графіком лінійної функції?
19. Як побудувати графік лінійної функції?
20. За яких значень k лінійна функція $y = kx + b$ є зростаючою; спадною; сталою?
21. Як характеризує лінійну функцію число b ?
22. Яка функція називається прямою пропорційністю?
23. Яка пряма є графіком прямої пропорційності?
24. У якому випадку графік функції $y = kx$ утворює з додатним променем осі OX гострий кут; тупий кут?
25. Яке число називають кутовим коефіцієнтом?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1°. Знайдіть значення функції $y = 2x^2 - 3$, якщо $x = -2$:

А. -5 .

В. 1 .

Б. 5 .

Г. -11 .

2°. У якій точці перетинає вісь абсцис графік функції $y = 5x - 12$?

А. $A\left(\frac{5}{12}; 0\right)$.

В. $C(2,4; 0)$.

Б. $B(0; 12)$.

Г. $D\left(0; \frac{5}{12}\right)$.

3°. Яка з точок $A(-1; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(-1; 1)$ чи $D(1; -1)$ належить графіку функції $y = -2x^3 + 1$?

А. A .

В. C .

Б. B .

Г. D .

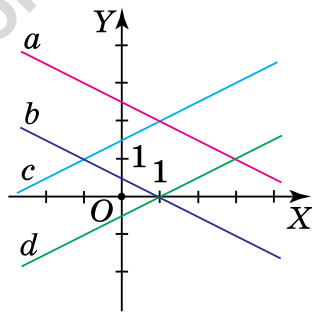
4. На малюнку 59 зображено графіки чотирьох лінійних функцій $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ і $d(x)$. У графіків яких функцій кутові коефіцієнти додатні?

А. a і c .

В. a і b .

Б. b і d .

Г. c і d .



Мал. 59

5*. Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її кутовий коефіцієнт є числом, протилежним до середнього арифметичного всіх додатних двоцифрових чисел, кратних числу 4 і менших від числа 41.

А. $y = 24x + b$.

В. $y = -220x$.

Б. $y = -26x$.

Г. $y = -40x$.



Розділ 5. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

У розділі дізнаєтесь:

- які рівняння називають рівносильними;
- про властивості рівносильності рівнянь;
- що таке лінійне рівняння з однією змінною; із двома змінними;
- про графік лінійного рівняння з двома змінними;
- що таке система двох лінійних рівнянь із двома змінними та як її розв'язують;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці

§ 19. РІВНЯННЯ. ВЛАСТИВОСТІ РІВНОСИЛЬНОСТІ РІВНЯНЬ

Ситуація. Учні 7-х класів вирушили в пішохідний похід. Батькам вони повідомили, що за 3 год походу вони подолали 13,5 км. При цьому за кожну наступну годину вони проходили на 0,5 км менше, ніж за попередню. Батьки встановили, яку відстань діти долали щогодини.



qr.orioncentr.com.ua/BzELm



Як батьки дізналися, яку відстань діти долали щогодини?

Склали і розв'язали рівняння.



Нехай x — відстань, яку діти пройшли за першу годину, тоді $x + (x - 0,5) + (x - 1)$ — відстань, яку пройшли діти за три години походу.

Ця відстань за умовою дорівнює 13,5 км, тому $x + (x - 0,5) + (x - 1) = 13,5$.

Ця рівність набуває смислу рівняння, якщо поставити вимогу знайти значення змінної, що перетворює дану рівність зі змінною на правильну числову рівність.

Запам'ятайте!

Рівнянням називається рівність зі змінною, значення якої треба знайти.

Значення змінної, яке перетворює рівняння на правильну числову рівність, називається *коренем рівняння*.

Наприклад, коренем рівняння $2x + (x - 0,5) - 1 = 13,5$ є число 5, оскільки $2 \cdot 5 + (5 - 0,5) - 1 = 13,5$.



Інакше кажуть: «Число 5 задовольняє рівняння».

Рівняння може мати один або кілька коренів, безліч коренів або не мати коренів (табл. 34).

Таблиця 34

Рівняння	$5x - 12 = 2x$	$(x - 5) \times (x + 3) = 0$	$x - x = 0$	$0 \cdot x = -12$
Корені рівняння	4	5 і -3	будь-яке число	немає коренів

Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або встановити, що рівняння не має жодного кореня.

Рівняння, що мають одні й ті самі корені, називаються *рівносильними*. Рівняння, які не мають коренів, також вважають рівносильними.

Наприклад, рівняння $2(x - 6) + 10 = 12$ і $2x = 14$ є рівносильними, оскільки мають один корінь — число 7.



Рівносильні рівняння можна отримати, якщо:

- 1) до обох частин рівняння додати одне й те саме число;
- 2) у рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний;
- 3) обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля.

Задача Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{6} - 7 = 1 - \frac{x-3}{3}$.

Розв'язання Застосуємо властивості рівносильності рівнянь і тотожні перетворення.

1. Позбудемося дробів:

$$\frac{x}{6} - 7 = 1 - \frac{x-3}{3} \mid \cdot 6,$$

$$x - 7 \cdot 6 = 1 \cdot 6 - 2(x - 3),$$

2. Розкриємо дужки:

$$x - 42 = 6 - 2x + 6,$$

3. Усамітнимо змінну:

$$x + 2x = 6 + 6 + 42,$$

4. Зведемо подібні доданки:

$$3x = 54,$$

5. Знайдемо корінь:

$$x = 18.$$

Класифікацію рівнянь можна проводити за різними основами (табл. 35).

Таблиця 35

Рівняння	Основа класифікації	
	Кількість змінних у рівнянні	Степінь многочлена, який «породжує» рівняння
$4x + 7 = 15$	рівняння з однією змінною	рівняння першого степеня
$2x(3 - 5,1y) = 0$	рівняння з двома змінними	рівняння другого степеня

Дізнайтеся більше

Конфорович Андрій Григорович (1923–1997) — фахівець у галузі історії математики й популяризації математичних знань в Україні. У його доробку — понад 200 друкованих праць. Основні з них: «Визначні математичні задачі», «Колумби математики», «Математичні софізми і парадокси», «Добрий день, Архімеде!» та інші. qr.orioncentr.com.ua/saSm9



Словничок

qr.orioncentr.com.ua/zpciQ

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
рівняння	equation	Gleichung (f)	équation

Пригадайте головне

1. Що таке рівняння?
2. Що називають коренем рівняння?
3. Що означає «розв'язати рівняння»?
4. Які рівняння називаються рівносильними?
5. Сформулюйте властивості рівносильності рівнянь.

Усне тренування

Розгадайте фокус. Оберіть будь-яке число. Помножте його на 2, додайте 8, поділіть на 2 та відніміть початкове число. Результат завжди буде 4. Чому?

Розв'яжіть задачі

753'. Яке із чисел -5 , -1 , 0 , 2 чи 4 є коренем рівняння:

- 1) $5x + 25 = 0$;
- 2) $6y - 8 = 8$;
- 3) $0,4x - 1,6 = 0$;
- 4) $4y - 12 = 4$?

754'. Чи правильно, що дане рівняння: а) має рівно один корінь; б) має більше, ніж один корінь; в) не має коренів; г) має безліч коренів:

- 1) $-2x + 8 = 0$;
- 2) $0y + 25 = 0$;
- 3) $6x - 11 = -11$;
- 4) $6 + 2y = 6 - y + 3y$;
- 5) $(x - 5)(x + 2) = 0$;
- 6) $y(y - 8)(4 - y) = 0$?

755'. Дано рівняння $-5x + 10 = 0$. Чи отримаємо рівносильне йому рівняння, якщо:

- 1) доданок 10 перенесемо в праву частину рівняння;
- 2) доданок 10 перенесемо з протилежним знаком у праву частину рівняння;
- 3) обидві частини рівняння поділимо на 5;
- 4) змінимо знаки всіх доданків на протилежні?

756°. Яку властивість рівносильності треба використати, щоб від рівняння $0,5x - 2 = 0$ перейти до рівняння:

1) $0,5x = 2$;

3) $5x - 20 = 0$;

2) $x - 4 = 0$;

4) $-0,5x + 2 = 0$?

Відповідь поясніть.

757°. Чи є рівносильним рівнянню $2x + 8 = 0$ рівняння:

1) $2x + 8 - 8 = -8$;

3) $x + 4 = 0$;

2) $2x = -8$;

4) $4x + 16 = 0$?

Відповідь поясніть.

758°. Чи є рівносильним рівнянню $5y - 20 = 0$ рівняння:

1) $5y - 20 + 20 = 20$;

3) $-5y + 20 = 0$;

2) $5y = 20$;

4) $y - 4 = 0$?

Відповідь поясніть.

759°. Чи є рівносильними рівняння:



1) $x = -x$ і $5x = -6x$;

2) $y - 3y = 3$ і $3y - y = 3$;

3) $2(x + 1) = -2(5 + x)$ і $2x = -6$;

4) $5(y - 2) - 5 = 0$ і $4y = -12$?

Відповідь обґрунтуйте.

qr.orioncentr.com.ua/cF1N2



760°. Чи є рівносильними рівняння:

1) $2x = 5 - 4x$ і $6x = 5$;

2) $y - 12 = -y$ і $3y = 18$;

3) $9x - 3(3x - 1) = 0$ і $2,5(2x - 5) = 5x$?

Відповідь обґрунтуйте.

761°. Наведіть приклад чотирьох рівносильних рівнянь.

762°. Складіть три рівносильні рівняння.

763°. Розв'яжіть рівняння:

1) $5x - 4 = 6$;

7) $6z + 3 = 66 + 3z$;

2) $5 - 2y = 11$;

8) $5x - 22 = 5 - 4x$;

3) $16 = 12 - 4x$;

9) $-12 - 7y = -4 + y$;

4) $-5 = 5y + 15$;

10) $2y + 3y = 28 - 2y$;

5) $2x = 4x + 12$;

11) $18 - 12x + 3x = 6 - 5x$;

6) $-7y = 18 - 5y$;

12) $5y - 10 - 9y = 12y - 42$.

764°. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $12 - 4x = 40$; 4) $26 + 2x = 7x - 9$;
 2) $7y - 27 = -2y$; 5) $35 + 17y - 5 = 2y$;
 3) $15 - 3y = 14 - 2y$; 6) $12z = 5z - 18 - 2z$.

765°. Складіть рівняння з однією змінною, коренем якого є число: 1) -2 ; 2) $1\frac{3}{5}$.

766°. Складіть рівняння з однією змінною, коренем якого є число: 1) 5 ; 2) 0 .

767. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2(x - 4) - 2(5 - 8x) = 18$;
 2) $9(y + 2) = 8(1 - y) + 24$;
 3) $0,4x - 2,6 = 5(0,2 - x) - 0,3(x + 4)$;
 4) $0,5(2 - x) + 2(4x - 0,2) + 5,9 = -5,5x$;
 5) $\frac{2y-3}{5} - \frac{1-y}{4} = \frac{y+5}{8} + \frac{1}{10}$;
 6) $\frac{3z+5}{8} + \frac{1}{2} = \frac{2+z}{3} + 3$;
 7) $\frac{x-4}{3} + \frac{3x-2}{6} - \frac{2x-1}{2} = x-2$;
 8) $x^2 - 3x + 3 - \frac{3x^2 - 2x + 1}{3} = \frac{1}{3}$.

768. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3(9 + x) - 6(x - 3) = 0$;
 2) $7y - 0,3(5 - 2y) = 0,4y + 4,5$;
 3) $\frac{y}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{y}{3}$;
 4) $\frac{3-y}{3} + \frac{5y}{2} = 1 - \frac{5-y}{6}$.

769. Доведіть, що:

- 1) коренем рівняння $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 4) - 2(x - 4)$ є будь-яке число;
 2) рівняння $4(y + 1)(y - 1)(y - 8) = 0$ має три корені;
 3) рівняння $(x + 5)(x + 4) = x(x + 9) + 4$ не має коренів.

- 770*.** Доведіть, що рівняння $0,7(x - 3) - (0,5 - 2x) = 0,9(3x - 1) + 0,1$ рівносильне рівнянню:
 1) $x^2 = -1$; 2) $|x| = -5$; 3) $-16x^4 = 81$.

Проявіть компетентність

- 771.** Про видатного математика давнини Діофанта відомо дуже мало, навіть невідомі роки його життя. На гробниці Діофанта напис складено у формі задачі. Розв'яжіть її та встановіть, скільки років прожив Діофант.

Подорожній! Поховано тут Діофанта.

І числа розкажуть тобі,

Який дивний шлях він життєвий пройшов.

Шосту частину його становило дитинство.

Минула частина дванадцята —

І пухом покрилось його підборіддя.

Сьому — в бездітному шлюбі прожив Діофант.

Минуло п'ять літ. Ощасливлений був він

Народженням первенця — сина,

Якому судилась лише половина життя його батька.

У глибокій журбі старець закінчив шлях на землі,

Ще проживши років чотири з часу,

Коли сина не стало.

Скажи, віку якого досягши, славетний помер

Діофант.

- 772.** Чи можна визначити, яка з двох ділянок землі матиме більшу площу, якщо:



- 1) ділянки мають однакову ширину, довжина першої ділянки вдвічі більша за її ширину, а довжина другої — утричі більша за її ширину;
- 2) обидві ділянки мають огорожу однакової довжини?



§ 20. ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Ситуація. Троє рибалок Микита, Тарас і Петро розповідали семикласникам про свої рибальські здобутки.

Микита сказав: «Рибалив я нещодавно три дні. Першого дня я спіймав $\frac{1}{3}$ свого загального улову,

другого — $\frac{8}{12}$ цієї самої кількості, а третього — останні 19 рибин».

Тарас оповідав: «А я ходив на дводенну рибалку. Першого дня я спіймав на 1 рибину більше, ніж другого. Але, якщо кількість спійманої мною риби за перший день збільшити вдев'ятеро, а потім від отриманого числа відняти 9, то це буде рівно в дев'ять разів більше за кількість рибин, що я спіймав другого дня».

Петро розповів: «А я першого дня спіймав на 2,5 кг більше, ніж другого. Якби масу спійманої мною за перший день риби подвоїти, а за другий день — збільшити втричі, то весь мій улов мав би таку саму масу, як моя маса. А моя маса — 70 кг».



gr.orioncentr.com.ua/aVr5u



Хто з рибалок каже правду, а хто ні?

Тільки Петро каже правду (табл. 36).



Таблиця 36

	Позначення	Рівняння	Корінь рівняння
Микита	x — кількість усіх рибин, спійманих за 3 дні	$\frac{1}{3}x + \frac{8}{12}x + 19 = x$, $0 \cdot x + 19 = 0$	коренів немає
Тарас	x — кількість рибин, спійманих першого дня	$9x - 9 = 9(x - 1)$, $0 \cdot x = 0$	будь-яке число
Петро	y — маса риби, спійманої другого дня	$2(y + 2,5) + 3y = 70$, $5y - 65 = 0$	13