La relation de proportionnalité

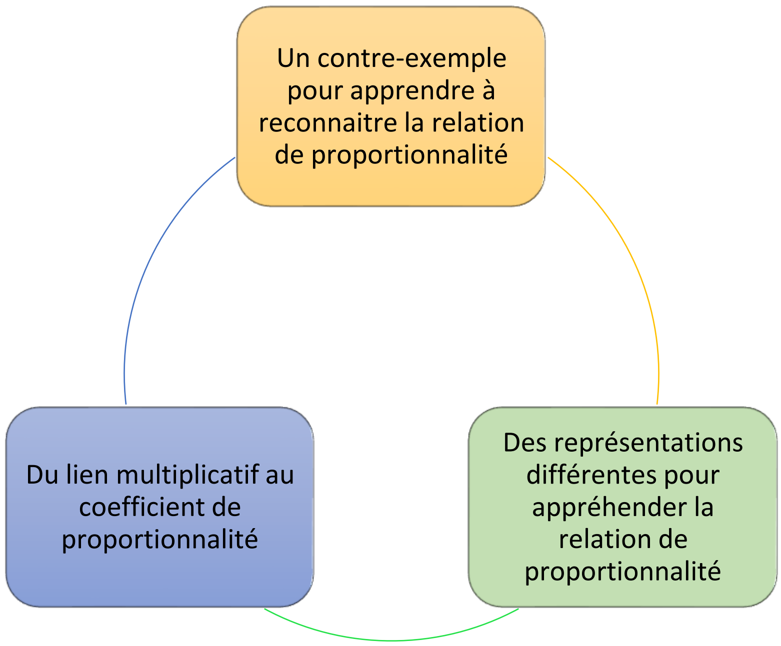
Ce document d'accompagnement au programme de mathématiques est le fruit d'un travail mené au départ des questions exprimées par les enseignants lors des Ateliers Tronc Commun.

Cet outil propose des réflexions didactiques qui s'appuient sur une lecture commentée d'une banque d'exercices repris dans différents manuels présents sur le marché de l'édition en Belgique francophone.

L'enseignement de la relation de proportionnalité dès la S1 est axé sur la perception d'une relation particulière entre deux grandeurs. La relation étant un objet mathématique abstrait, pour soutenir son apprentissage, trois orientations méthodologiques ont guidé la conception de ce document :

- Confronter l'élève à diverses *situations concrètes* l'amène à se construire le sens de la relation de proportionnalité et à identifier ses caractéristiques spécifiques.
- Appréhender la relation de proportionnalité par *différentes représentations* (verbale, numérique, graphique et symbolique) et les articuler rendent l'objet abstrait plus visible et donc plus accessible à l'élève.
- Comprendre finement l'expression « *être multiple de* » est un préalable à l'expression analytique de la relation ($y = a \cdot x$) où l'appellation « coefficient de proportionnalité » prend tout son sens.

Ce document peut être consulté selon 3 thématiques. Un seul clic sur le schéma ci-dessous permet d'accéder directement à une de celle-ci.



Un contre-exemple pour apprendre à reconnaitre la relation de proportionnalité

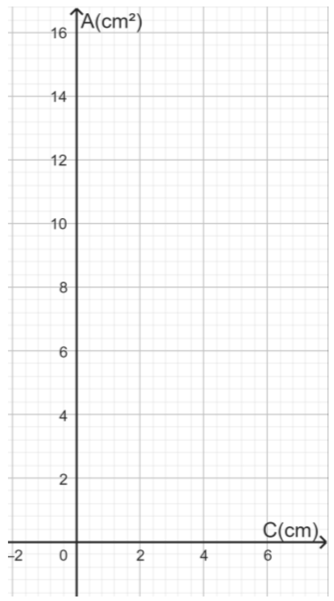
Activité 1

Lorsque la longueur du côté d’un carré varie, son aire varie aussi.
La longueur du côté du carré et son aire sont en relation.

1. Entoure le nom des grandeurs citées dans la phrase précédente.
2. Complète le tableau ci-dessous.
   C désigne la longueur du côté d’un carré (cm)
   A désigne l’aire du carré (cm^2)

C (cm)	1	2	3	4
A(cm^2)				

3. Dans le repère cartésien ci-dessous, place les points qui représentent la relation entre la longueur du côté du carré et son aire.



4. La longueur du côté du carré et son aire, sont-elles des grandeurs directement proportionnelles ? Justifie.

Cette activité a plusieurs intentions :

- Confronter les élèves à des situations de non-proportionnalité afin qu’ils puissent identifier les caractéristiques inhérentes aux situations de proportionnalité : c’est en confrontant l’élève à « ce qui n’est pas » que l’on peut cerner les particularités de « ce qui est ».
- Utiliser l’expression « contre-exemple ».
- Mobiliser des supports différents pour justifier.

De plus, proposer à l’élève de placer et de relier « avec la main » des points qui ne sont pas alignés permet d’aller en l’encontre d’une impression intuitive et spontanée de linéarité.

Ce type d’activité est à proposer aux élèves en début d’apprentissage et non en évaluation.

Activité 2

Sur un marché, Chiara achète des pommes de terre. Un écriteau indique :

1 kg pour 5€

2 kg pour 8€

4 kg pour 15€

1. Quelles sont les grandeurs et leurs unités de mesure présentes sur l'écriteau ?

Grandeurs		
Unités de mesure		

2. Complète le tableau ci-dessous.
   Q désigne la quantité achetée (kg)
   P désigne le prix à payer (euros)

Q (kg)	1	2	3	4	5	6
P (€)						

3. Quel sera le prix payé pour 3kg, 5kg, 6kg ? Décris la démarche suivie.

La situation proposée dans cette activité met en évidence l'impossibilité de prédire avec exactitude le prix à payer pour n'importe quelle quantité vu l'absence de règle.

En groupe classe, les élèves confrontent leurs réponses émanant de stratégies différentes de calcul. La diversité de réponses et de stratégies permet à l'enseignant d'expliquer l'intérêt de l'existence d'une relation et de sa description pour pouvoir anticiper ce que l'on va payer quelle que soit la quantité achetée. Dans le cas contraire, le prix à payer est aléatoire c'est-à-dire dépendrait de « la tête du client » !!

De plus, ce type d'activité n'amenant pas une et une seule réponse, vient semer le doute et permet l'initiation au débat mathématique.

Activité 3

Exercice 1

Parmi les situations ci-dessous, quelles sont celles qui traduisent une relation de proportionnalité directe ? Argumente tes choix.

Situation 1

A 8 ans, Jean avait 24 dents. A 32 ans, combien Jean aura-t-il de dents ?

Situation 2

Pour faire sécher 8 essuies sur une corde à linge, il faut 24 minutes. Dans les mêmes conditions d'ensoleillement, combien de temps faudra-t-il pour faire sécher 32 essuies?

Situation 3

Noémie et son père font une promenade à pied. Lorsque son père fait 8 pas, Noémie doit en faire 24. Lorsque son père fera 32 pas, combien Noémie devra-t-elle en faire ?

Situation 4

Aujourd'hui, deux cousins, Maxime et Noah fêtent ensemble leur anniversaire. Maxime a 10 ans et Noah a 5 ans. Quel âge aura Noah lorsque Maxime fêtera son 20ème anniversaire ?

Situation 5

Mes parents ont loué une maison de vacances pour 1 semaine au prix de 800€. Combien aurions-nous payé si nous étions restés 2 semaines ?

Situation 6

Aujourd'hui la température était de 2°C à 6h du matin. Quelle sera la température à midi (12h) ?

Exercice 2

Parmi les situations ci-dessous, quelles sont celles qui lient deux grandeurs directement proportionnelles ? Argumente tes choix.

	Les grandeurs sont proportionnelles	Les grandeurs ne sont pas proportionnelles
Le volume d'un frigo et son prix.		
La vitesse d'un train et l'espace parcouru.		
La longueur des cheveux d'une femme et son âge.		
Le prix de la saucisse et la taille de la boucherie.		
Le côté d'un triangle équilatéral et son périmètre.		
L'intelligence d'une personne et son poids.		
La longueur de l'arête d'un cube et son volume.		
La masse d'un bébé et sa taille.		
La masse d'un paquet de feuilles et le nombre de feuille dans le paquet.		
Le salaire d'un enseignant et le nombre d'élèves dans sa classe.		

Les situations proposées dans cette activité amènent les élèves à sortir de l'intuition que tout est proportionnel. Cette activité est déclinée sous deux versions différentes.

a) L'exercice 1 propose 6 situations rédigées sous forme de situation problème avec une question posée. Elles sont volontairement rédigées de sorte que spontanément les élèves aient envie d'y voir la proportionnalité.
b) L'exercice 2 explicite 10 relations pouvant exister entre deux grandeurs. Cette formulation amène à questionner l'existence d'une relation entre les grandeurs énoncées.

En groupe classe, les élèves confrontent leurs réponses et justifient leur choix. C'est à travers les échanges avec les autres, au départ d'exemples ou de contre-exemples que les élèves vont prendre conscience de l'absence de proportionnalité et remettre en question la croyance du « Tout est proportionnel.

Des représentations différentes pour appréhender la relation de proportionnalité.

Les objets mathématiques sont fondamentalement abstraits, ne sont pas directement accessibles par la perception (on ne peut montrer une relation au même sens qu'on montre une table). Ils sont donc essentiellement manipulés via leurs représentations sémiotiques[1].

Comprendre un objet mathématique suppose d'être capable de le représenter dans divers registres et d'articuler ces représentations entre elles.

Différents registres :

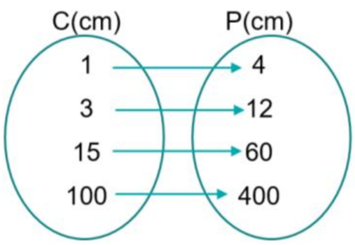
- ✓ Registre verbal (des mots)
- ✓ Registre numérique (un tableau de nombres)
- ✓ Registre graphique (un graphique)
- ✓ Registre symbolique (des formules)

Pour aider l'élève à appréhender et s'approprier le concept de relation, il est nécessaire de lui proposer des exercices sollicitant le passage d'une représentation à une autre : verbale, numérique et graphique en S1, symbolique en S2.

Exemple - La longueur du côté du carré et son périmètre sont deux grandeurs en relation…

« Comment appréhender, visualiser cette relation ? »

- **Représentation ensembliste**



La représentation ensembliste d'une relation est un support visuel accessible aux élèves de S1.
Elle est constituée de 3 éléments significatifs :

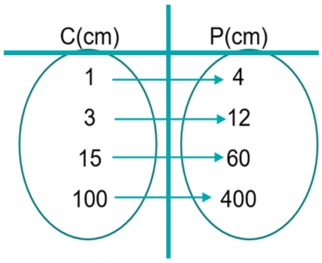
- **les diagrammes**
  Ils permettent de distinguer les 2 grandeurs, de rassembler les valeurs prises par chacune dans un ensemble.
- **le trait**
  Il permet de visualiser le lien, la relation, la correspondance, l'attache entre deux valeurs.
- **la flèche**
  Elle donne du mouvement, elle indique le sens (de x vers y).

« Si le côté mesure 3 cm, alors le périmètre du carré vaut 12 cm. »

3 est donc « envoyé » sur 12

$3 \curvearrowright 12$

➢ Représentation numérique



C(cm)	P(cm)
1	4
3	12
15	60
100	400

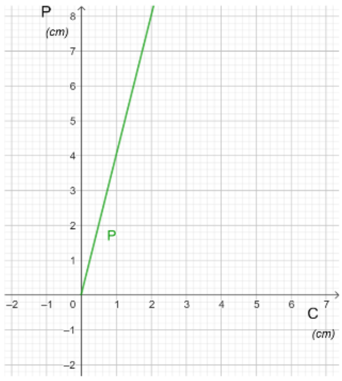
La représentation numérique peut aisément se superposer à la représentation ensembliste : les ensembles deviennent des colonnes, le trait entre deux valeurs se traduit par leur position sur une même ligne dans le tableau.

Le sens de lecture indiqué par la flèche dans la représentation ensembliste se traduit par une lecture du tableau de gauche à droite (de C vers P).

Selon la réalité de la classe et l'appropriation du concept de relation, la représentation de la flèche entre deux valeurs correspondantes peut être maintenue dans le tableau pour aider l'élève à visualiser le lien et le sens du mouvement.

- **Représentation graphique**

$C(cm)$	$P(cm)$	Coordonnées de points
1	4	(1 ;4)
3	12	(3 12)
15	60	(15 ;60)
100	400	(10 ;400)



En S1, l'élève apprend à représenter graphiquement une relation entre deux grandeurs dans un repère orthonormé : placer des points au départ de la représentation numérique.

Cet objectif s'appuie sur deux apprentissages :

- Placer, dans un repère orthonormé[1], un point dont les coordonnées sont données (attendu exercé dans le champ « Des objets de l'espace à la géométrie »).
- Appréhender le passage de la représentation numérique à la représentation graphique c'est-à-dire traduire les informations se trouvant sur une ligne du tableau en coordonnées de points.

« Si le côté mesure 3 cm, alors le périmètre du carré vaut 12 cm. »

$3 \longrightarrow 12$

C(cm)	P(cm)
1	4
3	12

« Je place le point de coordonnées (3 ;12) dans le repère cartésien. »

- **Représentation symbolique (S2)**

C(cm)	P(cm)
1	4
3	12
15	60
100	400

$\cdot 4$

« Chaque valeur prise par la grandeur c est multipliée par 4 pour obtenir la longueur du périmètre du carré. »

$$c \cdot 4 = P$$

$P = 4 \cdot c$ expression analytique de la relation

De la représentation numérique vers la représentation symbolique

La représentation symbolique s'appuie sur une compréhension fine de l'expression « être multiple de » travaillée dès la S1 au départ de questions du type « Décris l'opération qui permet de passer d'une grandeur (x) à l'autre (y) ».

De la représentation symbolique vers la représentation numérique

Lorsque la représentation symbolique est installée (la « formule » est écrite), il importe de travailler la mise en mots de celle-ci afin de lui associer une signification au-delà des symboles utilisés et ainsi faciliter le calcul des valeurs à placer dans le tableau.

Par exemple, lorsque l'élève rencontre l'expression analytique "$y = 3 \cdot x$", il la traduit par la phrase « Pour obtenir les valeurs de la grandeur y, je multiplie les valeurs de la grandeur x par 3 » ce qui décrit la démarche de calcul permettant de compléter le tableau de valeurs et aller par la suite vers la représentation graphique.

On sera attentif à écrire aussi l'égalité dans l'autre sens "$x \cdot 3 \ = \ y$" pour compléter le tableau de valeurs afin d'être au plus proche du raisonnement qui s'appuie sur le visuel ci-dessous.

$$x \xrightarrow{.3} y$$

➢ **Mettre en lien les représentations**

La consommation d'essence d'une voiture est-elle proportionnelle à la distance parcourue ?

1. Énonce les grandeurs citées dans la phrase précédente.
2. **Une voiture consomme 5 litres pour 100km parcourus.**
   Complète le tableau ci-dessous.
   C désigne la consommation d'essence de la voiture (L)
   D désigne la distance parcourue (km)

C (L)	5	10	20	50
D (km)				

3. Existe-t-il un lien entre la consommation d'essence d'une voiture et la distance parcourue ?
   Dans l'affirmative, décris l'opération qui permet de déterminer la distance parcourue à partir de la consommation d'essence.

4. Dans le repère cartésien ci-dessous, place les points qui représentent la relation entre la consommation d'essence d'une voiture et la distance parcourue

L'exercice ci-dessus confronte l'élève aux 3 représentations d'une même relation. Ensuite, l'élève justifie la proportionnalité en choisissant l'une ou l'autre représentation la plus évocatrice pour lui.

Cette activité soutient la construction chez l'élève, d'une image mentale associant les 3 représentations différentes d'un même concept. L'élève ne peut ainsi réduire le concept à une seule de ses représentations ce qui altèrerait son choix pour justifier ou répondre à une question.

Dans le parcours d'apprentissage, il convient de trouver un équilibre entre les activités visant à :

- construire une représentation de la relation de proportionnalité dans chaque registre ;
- associer des représentations différentes d'une même situation de proportionnalité.

- Schéma illustrant les différentes représentations pour le concept de « relation de proportionnalité »

Ce schéma rassemble 4 représentations possibles d'un même concept. Ce modèle visuel permet de travailler l'équivalence entre les différents langages qui soutiennent la compréhension du concept.

Relation de proportionnalité

Registre verbal

Les grandeurs directement proportionnelles sont multiples l'une de l'autre.

Pour obtenir la longueur du périmètre du carré, on multiple la longueur du côté par 4.

Registre numérique

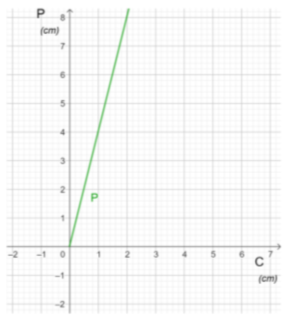
C(cm)	P(cm)
1	4
3	12
15	60
100	400

$\cdot 4$

Registre symbolique

$$P = 4 \cdot C$$

Registre graphique



Les points définissent une droite qui passe par l'origine du repère.

L'élève dispose d'une illustration des différentes représentations d'un même concept favorisant la compréhension de ses différentes écritures. Ce support aide l'élève à identifier le registre dans lequel s'inscrit une activité donnée.

Les liens entre le langage courant, la représentation graphique et le langage symbolique peuvent être compliqués à réaliser pour une grande majorité d'élèves.

Du lien multiplicatif au coefficient de proportionnalité

<table>
<tr><th></th><th>S1</th><th>S2</th></tr>
<tr>
<td>Quels sont les attendus d' apprentissage ?</td>
<td>
En S1, l’apprentissage se centre sur la compréhension/l’appropriation de ce qui caractérise la relation de proportionnalité.

• Attendu de savoir
- Exprimer que deux grandeurs directement proportionnelles sont « deux grandeurs <u>multiples</u> l’une de l’autre ».

• Attendu de savoir-faire
- Établir les liens multiplicatifs entre deux grandeurs directement proportionnelles dans un tableau.

Les activités proposées en S1 doivent soutenir la compréhension de l’expression « être multiple de » : l’élève associe à cette expression, l’opération multiplication.
Pour ce faire, à partir d’un tableau de valeurs, on propose la question suivante :

« Décris l’opération qui permet de passer de la grandeur x à la grandeur y »

La réponse à cette question met en évidence l’opération liant les deux grandeurs alors que la réponse à la question « Ecris le coefficient de proportionnalité » met en évidence la valeur de la constante multiplicative.
</td>
<td>
En S2, l’apprentissage se centre sur l’interprétation de la valeur et du signe du coefficient de proportionnalité.

• Attendus de savoir
- Décrire le rôle du coefficient de proportionnalité.
- Associer le signe du coefficient de proportionnalité à la (dé)croissance de la relation.
- Justifier qu’une relation de proportionnalité donnée est (dé)croissante, à partir de son tableau de nombres, de sa représentation graphique ou de son expression analytique.

• Attendu de savoir-faire
- Calculer un coefficient de proportionnalité dans des situations de proportionnalité directe.

La relation de proportionnalité est représentée de manière symbolique en S2.
$y = a \cdot x$
L’expression « coefficient de proportionnalité » qui est symbolisé par la lettre a, est mise en lien avec l’utilisation qui en est faite dans l’expression analytique. Le coefficient de proportionnalité formalise le lien multiplicatif mis en place en S1.

➢ Comment peut-on interpréter la valeur du coefficient de proportionnalité ?

Selon le support utilisé, la valeur du coefficient de proportionnalité peut s’interpréter de différentes façons :

- la constante multiplicative dans l’expression : $y = a \cdot x$
- le rapport constant entre les 2 grandeurs : $\frac{y}{x} = a$
- la valeur de la relation à l’unité : la valeur de y lorsque x vaut 1.
- la valeur qui permet de décrire l’évolution de la relation (le rapport constant entre l’accroissement de la grandeur y et l’accroissement de la grandeur x).

Un exemple illustre ces différentes interprétations dans le programme de S2.
</td>
</tr>
</table>

Exemples

1. Décris l'opération qui permet de passer de la grandeur x à la grandeur y.
   Complète ensuite le tableau

x	1	3	5	9
y		21		63

ou

x	y
2	6
5	
	24

Points d'attention

- Il est nécessaire de varier la présentation du tableau de proportionnalité (horizontale/verticale) car elle influence la place du rapport externe et oblige ainsi l'élève à rester attentif.
- Les rapports entre les nombres en jeu et la maîtrise des tables de multiplication dans les deux sens vont influencer le choix de la procédure à utiliser pour compléter le tableau.
- Les valeurs numériques proposées dans les tableaux ne doivent pas constituer un obstacle à la compréhension du concept. Il importe de proposer dans un premier temps des nombres entiers entretenant entre eux des rapports simples (double, triple, quintuple…) pour aller progressivement vers des situations plus compliquées (nombres décimaux, des entiers négatifs et en S2, des fractions).

Exemple supplémentaire :

« J'ai acheté 35 mangas qui étaient tous au même prix à la librairie et cela m'a coûté 252 €. »

Quelle est la valeur du coefficient de proportionnalité (CP) ?

$$\text{CP} = \frac{\text{Prix à payer}}{\text{nombre de mangas achetés}} = \frac{252}{35} = 7{,}2$$

La valeur du coefficient de proportionnalité est 7,2. Son unité est € */manga.*

Il peut encore s'interpréter de différentes façons :

- ⇨ Pour déterminer le prix à payer, il suffit de multiplier par 7,2 le nombre de mangas achetés.
- ⇨ Le prix d'un manga est de 7,2€.
- ⇨ Chaque manga supplémentaire acheté, augmente le prix à payer de 7,2€ (relation croissante).

<table>
<tr><td rowspan="3">Points d' attention</td><td>En S1, on se limite aux liens multiplicatifs dont la valeur est un entier positif.

Dans des situations, le contexte peut amener un lien multiplicatif dont la valeur est un décimal limité positif.</td><td>En S2, le coefficient de proportionnalité peut-être un entier positif ou négatif ainsi qu'un nombre fractionnaire selon les apprentissages numériques réalisés.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dans le cas où les grandeurs sont de natures différentes, le coefficient de proportionnalité est une grandeur quotient dont l'unité de mesure est composée de 2 unités en présence. Il convient de donner du sens à cette grandeur quotient.

<u>Exemple</u> : À la station-service, le prix du carburant affiché est de 1,5 € par litre.
La valeur du coefficient de proportionnalité est 1,5 lorsqu'on exprime le prix en fonction de la quantité de carburant. Son unité de mesure est €/L.
Le coefficient de proportionnalité désigne la consommation du véhicule.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Selon le contexte, les points définis par la relation et placés dans le repère sont reliés ou non : la relation est discrète ou continue.
On sera attentif à être en adéquation avec le contexte pour pouvoir attribuer un sens à chaque point représenté.</td></tr>
</table>