Raisonnement par récurrence. Limite d'une suite

Raisonnement par récurrence

EXERCICE 1

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 9 \times 2^n + 5$.

EXERCICE 2

La suite (u_n) est définie par : $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$

1) Calculer u_2, u_3, u_4.
2) Que peut-on faire comme conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n ?
3) Démontrer cette conjecture par récurrence et donner la valeur exacte de u_{2021}.

EXERCICE 3

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = 1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$.

1) Déterminer u_1, u_2, u_3 puis déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n.
2) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

EXERCICE 4

Somme des carrés

On pose pour $n \geqslant 1$, $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

1) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.
2) Démontrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

EXERCICE 5

Somme des cubes

On pose pour $n \geqslant 1$, $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

1) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.
2) Démontrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

EXERCICE 6

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n + 6} \end{cases}$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \leqslant v_n \leqslant 10$

Exercice 7

La suite (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 \in]0\,;\,1[\\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \end{cases}$

1) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x(2 - x)$ est croissante sur $[0\,;\,1]$.
2) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 < u_n < 1$
3) En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 8

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 < u_n < 2$ et (u_n) croissante.

Exercice 9

Pour $n \geqslant 1$, on rappelle que : $n\,! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$.

Démontrer, par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ \ n! \geqslant 2^{n-1}$.

Exercice 10

Démontrer par récurrence que :

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 4^n + 5$ est un multiple de 3.
2) $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.
3) $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.
4) $\forall n \geqslant 1,\ \ n^3 + 2n$ est un multiple de 3.

Exercice 11

Soit la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1\ ,\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

Démontrer par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N} :\ \ u_n = 2^n$

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{2}{n+1}\right) u_n + \dfrac{6}{n+1} \end{cases}$

1) a) Calculer u_1 ; u_2 et u_3
   b) Soit la suite (d_n) définie par : $d_n = u_{n+1} - u_n$.
   Écrire une fonction p(n) en Python donnant tous les termes :
   - de 1 à n pour (u_n)
   - de 0 à $(n-1)$ pour (d_n)

   c) Remplir le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	5						
d_n							

   Conjecturer la nature de la suite (d_n).

2) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 4n^2 + 12n + 5$.
3) Valider la conjecture émise à la question 1c).

Limite d'une suite

EXERCICE 13

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1) $u_n = \dfrac{2n+5}{3n-2}$ 2) $u_n = \dfrac{n}{4} - 2 + \dfrac{2n}{n^2+5}$ 3) $u_n = \dfrac{-3n^2+2n+1}{2(n+1)^2}$

EXERCICE 14

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1) $u_n = \dfrac{10n-3}{n^2-2}$ 2) $u_n = \dfrac{2n^2-1}{3n+2}$ 3) $u_n = \dfrac{3n^2-4}{n+1} - 3n$

EXERCICE 15

Déterminer la limite de la suite (u_n) à l'aide du théorème des gendarmes ou de comparaison dans les cas suivants :

1) $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$
2) $u_n = n^2 - 4(-1)^n$
3) $u_n = n + 1 - \cos n$
4) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1} - 2$, $n \geqslant 2$.

EXERCICE 16

La suite (u_n) est définie pour $n \geqslant 1$ par : $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3
2) Écrire une fonction u(n) en Python qui retourne u_n pour $n \geqslant 1$.
   Donner alors u_{10}, u_{20}, u_{50} puis conjecturer la limite de (u_n) ?
3) Démontrer que pour $n \geqslant 1$: $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$
4) En déduire la convergence et la limite de la suite (u_n).

Limite d'une suite géométrique

EXERCICE 17

Déterminer la limite de la suite (u_n) tel que : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$

EXERCICE 18

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 2$
On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n + 3$.

1) a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n

2) On note $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

a) Calculer S_n en fonction de n puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

b) Déterminer T_n en fonction de S_n et n puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

EXERCICE 19

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = nu_n - 1$.

1) Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{1 + 0,5^n}{n}$.
3) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1 + 0,5^n(1 + 0,5n)}{n(n+1)}$.

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Suite monotone

EXERCICE 20

Pour les cas suivants, justifier si la suite (u_n) est majorée, minorée, bornée.

1) $u_n = \sin n - 3$
2) $u_n = n + \cos n$
3) $u_n = 2^n + 3n - 1$
4) $u_n = \dfrac{1}{1 + n^2}$
5) $u_n = 5(-3)^n + 2$
6) $u_n = 2 - n + (-1)^n$

EXERCICE 21

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
3) Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n).

EXERCICE 22

Vrai-Faux

1) **Proposition 1 :** « Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$. »
2) **Proposition 2 :** « Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$. »
3) **Proposition 3 :** « Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée. »
4) **Proposition 4 :** « Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante. »

EXERCICE 23

Deux méthodes pour déterminer la limite d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

Partie A : première méthode

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{u_n + 2}$.

2) a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n < 1$

   b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 - u_n^2}{u_n + 2}$ puis montrer que (u_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ

4) On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ avec f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$

   a) Déterminer la valeur de ℓ

   b) Écrire un algorithme déterminant la valeur N tel que : $\forall n > N,\ |u_n - \ell| < 10^{-3}$. Donner la valeur de N à l'aide de la calculatrice.

Partie B : deuxième méthode

1) La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

   Démontrer que (v_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

2) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

EXERCICE 24

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1) On considère l'algorithme en pseudo-code suivant :

```
Lire n
u ← 1
pour i variant de 1 à n faire
 | u ← √(2u)
fin
Afficher u
```

   a) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

   b) Que permet de calculer cet algorithme ?

   c) Remplir le tableau ci-dessous. On donnera les valeurs approchées à 10^{-3}

n	1	5	10	20
Valeur affichée				

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

   b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

   c) Démontrer que (u_n) est convergente. On ne demande pas sa limite.

EXERCICE 25

Vrai-Faux

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

1) **Proposition 1 :** « La suite (u_n) est bornée. »
2) **Proposition 2 :** « La suite (u_n) converge. »
3) **Proposition 3 :** « La suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge. »
4) **Proposition 4 :**
   « Toute suite (v_n) à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0. »

EXERCICE 26

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1) Calculer les termes u_1, u_2, u_3.
   Pour les termes u_2 et u_3, on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n+1}$
3) En déduire que la suite converge et calculer sa limite.

EXERCICE 27

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \end{cases}$

1) a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 (arrondir à 10^{-2} près).
   b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2) a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant n+3$
   b) Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n+3-u_n)$
   c) En déduire une validation de la conjecture précédente.
3) On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - n$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4) Pour tout n non nul, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $T_n = \dfrac{S_n}{n^2}$.
   a) Exprimer S_n en fonction de n.
   b) Déterminer la limite de la suite (T_n).

EXERCICE 28

On considère la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$

Partie A

1) Écrire une fonction v(n) en Python affichant les termes du rang 0 au rang n.
2) Compléter le tableau suivant pour $n = 8$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	1	1,800	2,143						

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 < v_n < 3$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

La suite (v_n) est-elle monotone ?

c) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite v_n.

On considère la suite (w_n) définie par : $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$

1) Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
2) En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3) Déterminer la limite de la suite (v_n).

EXERCICE 29

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$

1) Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.
2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

EXERCICE 30

Partie A

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 + 3u_n}{3 + u_n}$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n > 1$.

2) a) Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.

b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n). En déduire que (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n}$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1) On considère l'algorithme suivant :

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 9$. Les valeurs de u seront arrondies à 10^{-4}. Conjecturer le comportement de (u_n) à l'infini.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u									

```
Lire n
u ← 2
pour i variant de 1 à n faire
    u ← (1 + 0.5u)/(0.5 + u)
    Afficher u
fin
```

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

b) montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 31

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.

On pose la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.

1) Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2) Déterminer une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

EXERCICE 32

On veut étudier les suites de termes positifs telles que $u_0 > 1$ et possédant la propriété suivante : pour tout $n > 0$, la somme des n premiers termes est égale au produit de ces termes.
On admet qu'une telle suite (u_n) existe. Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$,
- pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

1) On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.
2) Pour $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.
   On a en particulier $s_1 = u_0$.
   a) Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.
   b) En déduire que pour tout entier $n > 0$, $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$.
   c) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 1$.
3) L'algorithme suivant calcule le terme u_n pour une valeur de n donnée.
   a) Compléter l'algorithme.

```
Saisir n, u
s prend la valeur u
pour i allant de 1 à n faire
    u prend la valeur ......
    s prend la valeur ......
fin
Afficher u
```

   b) Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

   Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?
4) a) Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.
   b) En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).