

Mathématiques BMI 1

Exercices

Les nombres complexes

Exercice 1

1) Écrire sous forme $a + bj$ le résultat des opérations suivantes :

a - $(2 + 3j) + (-1 + 2j) = \dots$;
 c - $(1 + 2j) + (1 - 2j) = \dots$;
 e - $(2 + 3j) \times (-1 + 2j) = \dots$;
 g - $(3 + 2j) \times (2 + j) = \dots$
 h - $(2 + 5j) \times (1 - 2j) = \dots$
 i - $(3 + j) \times (3 - j) = \dots$

b - $(2 + 3j) - (-1 + 2j) = \dots$
 d - $(1 + 2j) - (1 - 2j) = \dots$
 f - $(1 + 2j) \times (1 - 2j) = \dots$
 j - $(5 + j)^2 = \dots$
 k - $(5 - 3j)^2 = \dots$

2) Écrire sous forme $a + bj$ le résultat des opérations suivantes :

$$z_1 = \frac{1+j}{1-j} \quad z_2 = \frac{3+6j}{3-4j} \quad z_3 = \frac{2+5j}{1-j} + \frac{2-5j}{1+j} \quad z_4 = \frac{(4-3j)(1-2j)}{7-3j}$$

Exercice 2

Déterminer le module ρ et l'argument θ , exprimé en degrés arrondi à $0,1^\circ$ si besoin, des nombres :

$$z_1 = 2 + 3j$$

$$z_2 = 2 - 3j$$

$$z_3 = 2$$

$$z_4 = 2j$$

$$z_5 = 1 - 2j$$

$$z_6 = -1 + 2j$$

Exercice 3

Écrire sous forme algébrique $z = a + bj$ les nombres :

$$z_1 = [10 ; \frac{2\pi}{3} \text{ rad}] = \dots \quad z_2 = [5 ; \frac{\pi}{2} \text{ rad}] = \dots$$

$$z_3 = [2 ; -\frac{\pi}{4} \text{ rad}] = \dots \quad z_4 = [3 ; \pi \text{ rad}] = \dots$$

Exercice 4

Exprimer le conjugué des nombres complexes suivants. On posera $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$

$$\text{a) } z + 1,$$

$$\text{b) } z^2 + 3i,$$

$$\text{c) } \bar{z} + 2z,$$

$$\text{d) } \bar{z} + z - i,$$

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes :

$$3z + iz = 0$$

$$z + 2iz = i$$

$$z + 2 - i(z + 1) = 0$$

$$\frac{z - 1}{iz + 3} = 4i$$

Résoudre les équations du second degré suivantes :

$$2z^2 - 6z + 5 = 0$$

$$z^2 + z + 1 = 0$$

$$z^2 - 3z + 4 = 0$$

Exercice 6

Mettre sous la forme $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ (forme algébrique) les nombres complexes

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3+6i}{3-4i}; \quad z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2; \quad z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} \\ z_4 &= \frac{5+2i}{1-2i}; \quad z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3; \quad z_6 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} \\ z_7 &= -\frac{2}{1-i\sqrt{3}}; \quad z_8 = \frac{1}{(1+2i)(3-i)}; \quad z_9 = \frac{1+2i}{1-2i} \end{aligned}$$

Exercice 7

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{\frac{2i\pi}{3}}; \quad z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}; \quad z_3 = 3e^{-\frac{7i\pi}{8}}; \quad z_4 = \left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right); \\ z_5 &= \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}; \quad z_6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{\frac{5i\pi}{6}}\right); \quad z_7 = \frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{-\frac{5i\pi}{6}}} \end{aligned}$$

z_8 , le nombre de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

z_9 le nombre de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{8}$.

Exercice 8

Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle.

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1+i}{1-i}; \quad z_2 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3; \quad z_3 = (1+i\sqrt{3})^4; \quad z_4 = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5; \\ z_5 &= \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}; \quad z_6 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i} \end{aligned}$$