Mathématiques BMI 2

Exercices	Calculs de primitives et intégrales

1) Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a	$f(x)=\frac{6x+3}{(x^2+x+2)^2}$	b	$f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}$	c	$f(x)=x^3+2x-5$
d	$f(x)=10x^4+6x^3-1$	e	$f(x)=2x(x^2+1)^3$	*f*	$f(x)=\frac{-3}{(2x+5)^2}$
g	$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+4$	*h*	$f(x)=x\sin(x^2-4)$	i	$f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-5}}$
j	$f(x)=(4x-6)(x^2-3x+1)$	k	$f(x)=\frac{1}{x^2}+\sin(x)$	l	$f(x)=(3x^2+5)(x^3+5x-2)^2$
m	$f(x)=\sin(x)\cos^2(x)$	n	$f(x)=(3x-1)^4$	o	$f(x)=4x-\frac{3}{x^2}$

p	$f(x)=e^{4x}$	q	$f(x)=e^{4x+3}$	r	$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$
s	$f(x)=3x\sqrt{1+x^2}$	t	$f(x)=\frac{1-x^2}{(x^3-3x+2)^3}$	*u*	$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}}$

Ecritured'une intégrale sur l'intervalle [a ; b]
$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ ou $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$
Méthode intégration par parties
$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

2) Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

$A=\int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$	$B=\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x$	$C=\int_1^e x^2\ln(x)\mathrm{d}x$
$D=\int_1^e \ln(x)\mathrm{d}x$	$E=\int_1^e (\ln(x))^2\mathrm{d}x$	
$F=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos(x)dx$	$G=\int_0^{e-1}\frac{x}{(x+1)^2}dx$	

1) Corrections

$a) f(x)=\dfrac{6x+3}{(x^2+x+2)^2}=(-3)\dfrac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2},\left\{(-3)\dfrac{-v'}{v^2}\right\}\quad F(x)=-3\dfrac{1}{x^2+x+2}=\dfrac{-3}{x^2+x+2}$

$b)\ f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{2x-1}}=3\dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}},\left\{3\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}\right\}\quad F(x)=3\sqrt{2x-1}$

$c) f(x)=x^3+2x-5\quad F(x)=\dfrac{x^4}{4}+x^2-5x$

$d) f(x)=10x^4+6x^3-1\quad F(x)=10\dfrac{x^5}{5}+6\dfrac{x^4}{4}-x=2x^5+\dfrac{3}{2}x^4-x$

$e) f(x)=(2x)(x^2+1)^3,\{u'u^n\}F(x)=\dfrac{(x^2+1)^4}{4}$

$f) f(x)=\dfrac{-3}{(2x+5)^2}=\dfrac{3}{2}\dfrac{-2}{(2x+5)^2}\quad\left\{\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{-v'}{v^2}\right\}\quad F(x)=\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{2x+5}=\dfrac{3}{2(2x+5)}$

$g) f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+4\quad F(x)=\sqrt{x}+4x$

$h) f(x)=x\sin(x^2-4)=\dfrac{-1}{2}(-2x)\sin(x^2-4)\quad\left\{\dfrac{-1}{2}(-u'\sin u)\right\}\quad F(x)=\dfrac{-1}{2}\cos(x^2-4)$

$i) f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x-5}}=8\dfrac{1}{2\sqrt{x-5}}\quad\left\{8\cdot\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}\right\}\quad F(x)=8\sqrt{x-5}$

$j) f(x)=(4x-6)(x^2-3x+1)=2(2x-3)(x^2-3x+1)\quad\{2u'u^n\}\quad F(x)=2\dfrac{(x^2-3x+1)^2}{2}=(x^2-3x+1)^2$

$k) f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\sin x\quad F(x)=\dfrac{-1}{x}-\cos x$

$l) f(x)=(3x^2+5)(x^3+5x-2)^2\quad\{u'u^n\}\quad F(x)=\dfrac{(x^3+5x-2)^3}{3}$

$m) f(x)=\sin x\cos^2 x\quad\{-u'u^n\}\quad F(x)=-\dfrac{\cos^3 x}{3}$

$n) f(x)=(3x-1)^4=\dfrac{1}{3}\cdot3\cdot(3x-1)^4\ \{u'u^n\}\quad F(x)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(3x-1)^5}{5}=\dfrac{1}{15}(3x-1)^5$

$o) f(x)=4x-\dfrac{3}{x^2}\quad F(x)=2x^2+\dfrac{3}{x}$

p) $F(x)=\frac{e^{4x}}{4}+k$

q) $F(x)=\frac{e^{4x+3}}{4}+k$

r) $F(x)=\frac{ln^2(x)}{2}+k$

s) $F(x)=(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+k$

t) $F(x)=\frac{1}{6(x^3-3x+2)^2}+k$

u) $F(x)=\sqrt{x^2-2x}+k$

2) Corrections

$A=2\ln(2)-\frac{3}{4}$ $\quad B = 1$ $\quad C=\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}$ $\quad D = 1$ $\quad E = e - 2$

$F = \pi - 2$ $\quad G=\frac{1}{e}$