5	Mathématiques		T^{ale} Bac Pro
	Activités	Fonction exponentielle et logarithme décimal	

Nom : …………………………………………………………………….

Classe : …………………………..

Date évaluation : ………………………………………………………

Compétence	– –	–	+	++	
S'approprier					
Analyser / Raisonner					
Réaliser					
Valider					
Communiquer					

Je m'échauffe ...

1) Soit la suite géométrique u_n de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 5$.

   Donner l'expression de u_n en fonction de n : ……………………………………………………………

   Calculer le terme u_6 : ……………………………………………………………

Rappel : $u_n = u_0 \times q^n$

2) Simplifier les écritures en complétant les pointillés :

   $7\times7^2 = 7^{\cdots}$ $\quad 7^5\times7^3 = 7^{\cdots}$ $\quad (7^3)^4 = 7^{\cdots}$ $\quad \frac{7^5}{7} = 7^{\cdots}$ $\quad \frac{7^8}{7^3} = 7^{\cdots}$

3) Ecrire les nombres suivants sous forme de puissances de 10 :

   $100 =$ ………… $\quad 100\ 000 =$ ………… $\quad \frac{1}{10} = 0{,}1 =$ ………. $\quad \frac{1}{100\ 000} = 0{,}000\ 001 =$ ……….

Activité 1 L'exponentielle

Une personne a été diagnostiquée comme porteuse d'une maladie contagieuse. Les études concernant la propagation de cette maladie montrent que le nombre de malades triple tous les 10 jours.

<u>Problème :</u> Combien de malades devrait-on avoir au bout de 35 jours ?

1) **S'approprier** Donner le nombre de malades au bout de 10 jours, 20 jours, 30 jours et 40 jours.

   ………

   ………

2) **Analyser/Raisonner** Montrer que ces nombres constituent une suite géométrique dont on donnera le premier terme u_0 et la raison q. **L'indice n représente le nombre de dizaines de jours**.

   ………

   ………

   Exprimer le terme u_n en fonction de n : $\quad u_n =$ ………………………………………………

3) **Analyser/Raisonner** La suite géométrique permet-elle de déterminer le nombre de malades au bout de 25 jours ? Pourquoi ?

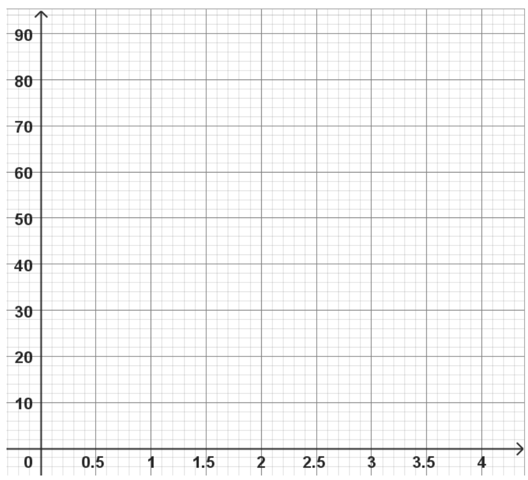
   ……………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………

4) **Réaliser** Sur la graphique ci-contre, placer les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.

5) **Valider** Tracer la courbe reliant les points, puis déterminer graphiquement le nombre de malades attendus au bout de 35 jours :

   ……………………………………………………………………………



La courbe tracée est représentative d'une fonction f appelée **fonction exponentielle** telle que $f(x) = 3^x$.
Elle permet de prolonger la suite géométrique à des valeurs non entières de n.

6) **Réaliser** Calculer $f(3,5)$ correspondant au nombre de malades au bout de 35 jours. Retrouve-t-on approximativement la valeur trouvée question 5 ?

....

....

7) **Réaliser** A l'aide de la calculatrice, tracer la représentation graphique de la fonction $f(x) = 3^x$ sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

8) **Valider** A l'aide des fonctionnalités de la calculatrice, déterminer graphiquement au bout de combien de jours le nombre de malades devrait dépasser $20\ 000$.

....

....

Je retiens ...

....

....

....

Entrainement 1

Exercice 1.1 : Les puissances

Simplifier les expressions suivantes :

$3 \times 3^4 \times 3^2 =$ .... $(4^5)^2 \times 4^3 =$ ....

$1,987^0 =$ .... $\frac{8,7^5}{8,7^3} =$ ....

Exercice 1.2 : Exponentielle

Parmi les fonctions ci-dessous, entourer celles qui sont des fonctions exponentielles :

$f(x)=x^2$ $g(x)=10^x$ $h(x)=x^3$ $m = \frac{1}{x}$ $n(x)=3,2^x$ $p(x)=2x$ $q(x)= 1,02^x$

Exercice 1.3 : Fonction exponentielle

Soit la fonction f telle que $f(x) = 1,05^x$ définie sur $[0 ; 20]$.

En utilisant les fonctionnalités de la calculatrice :

1) Compléter le tableau de valeurs (arrondir à 0,01) :

x	0	5	10	15	20
$f(x)$					

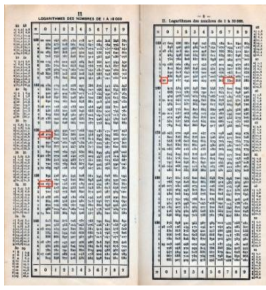
2) Donner sa représentation graphique ci-contre avec la fenêtre de réglage donnée.

Xmin = 0	Ymin = 0
Xmax = 20	Ymax = 3

3) Relever graphiquement les valeurs suivantes arrondies à 0,01 :

$f(6) =$ .... $f(12) =$ ....

Activité 2 Histoire du logarithme



La fin du XVIe siècle est l'époque des grands voyages maritimes et de la découverte des lois régissant le mouvement des planètes.
Les mesures astronomiques, nécessaires pour la navigation, impliquent des calculs complexes. Les multiplications et divisions sont particulièrement longues et pénibles.
Pour simplifier ces calculs, on cherche à construire des tables numériques à deux colonnes, mettant en correspondance les nombres de telle manière qu'à la multiplication de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'addition, plus facile et plus rapide, de deux nombres de la colonne de droite. La première table de ce type est publiée par l'Ecossais John Neper en 1614, après quarante ans de travail !

<u>Problème :</u> Quel est le résultat du produit 13×27 et du quotient 372÷31?

Voici des extraits de tables numériques (ci-contre) pour les nombres de 1 à 32 et les nombres de 350 à 381.

1) **S'approprier** Relever les valeurs (arrondies à 0,0001) correspondantes aux nombres **13** et **27**.

....

Additionner ces deux valeurs ci-contre.

A quel nombre correspond cette somme ?

....

Le résultat du produit **13×27** est ....

$$\begin{array}{r} \text{............................} \\ + \ \text{............................} \\ \hline \text{............................} \end{array}$$

2) **Réaliser** En utilisant cette fois-ci une différence, donner le résultat du quotient $\frac{372}{31}$.

....
....
....

Le résultat du quotient $\mathbf{\frac{372}{31}}$ est ....

$$\begin{array}{r} \text{............................} \\ - \ \text{............................} \\ \hline \text{............................} \end{array}$$

3) **Réaliser** A l'aide de la calculatrice, donner les valeurs suivantes (arrondir à 0,0001) :

$$\begin{array}{r} log(13) = \text{..........................} \\ + \ log(27) = \text{..........................} \\ \hline log(351) = \text{..........................} \end{array} \qquad \begin{array}{r} log(372) = \text{..........................} \\ - \ log(31) = \text{..........................} \\ \hline log(12) = \text{..........................} \end{array}$$

1	**0,0000**
2	0,3010
3	0,4771
4	0,6021
5	0,6990
6	0,7782
7	0,8451
8	0,9031
9	0,9542
10	**1,0000**
11	1,0414
12	1,0792
13	1,1139
14	1,1461
15	1,1761
16	1,2041
17	1,2304
18	1,2553
19	1,2788
20	1,3010
21	1,3222
22	1,3424
23	1,3617
24	1,3802
25	1,3979
26	1,4150
27	1,4314
28	1,4472
29	1,4624
30	1,4771
31	1,4914
32	1,5051

350	2,5441
351	2,5453
352	2,5465
353	2,5478
354	2,5490
355	2,5502
356	2,5514
357	2,5527
358	2,5539
359	2,5551
360	2,5563
361	2,5575
362	2,5587
363	2,5599
364	2,5611
365	2,5623
366	2,5635
367	2,5647
368	2,5658
369	2,5670
370	2,5682
371	2,5694
372	2,5706
373	2,5717
374	2,5729
375	2,5740
376	2,5752
377	2,5763
378	2,5775
379	2,5786
380	2,5798
381	2,5809

Le logarithme permet de transformer un produit en somme et un quotient en différence.

Soit deux nombres positifs a et b. Déduire des résultats précédents les relations donnant $log(a\times b)$ et $log\left(\frac{a}{b}\right)$, en fonction de $log(a)$ et $log(b)$.

$\boldsymbol{log(a\times b)} =$.......................................

$\boldsymbol{log\left(\frac{a}{b}\right)}=$.......................................

Je retiens ...

....
....
....
....

Entrainement 2

<u>Exercice 2.1 :</u> Puissances de 2

Dans le tableau ci-dessous, on a mis en correspondance des puissances de 2 (progression géométrique) et ses exposants (progression arithmétique).

2^x	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

2 + 4 = 6

En s'inspirant de l'exemple du produit 4×16, donner rapidement les résultats des autres produits :

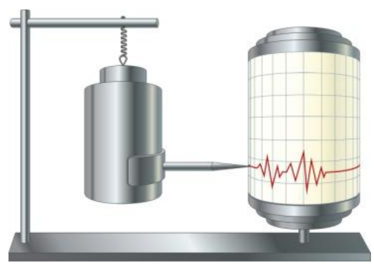
4×16 = 64	16×32 = ...	16×128 = ...
8×256 = ...	32×512 = ...	128×512 = ...

Activité 3 Le logarithme décimal

Pour évaluer la force d'un séisme, on calcule sa magnitude M. Pour cela on utilise un sismographe qui enregistre les mouvements du sol. On peut obtenir la magnitude M d'un séisme avec la relation suivante :

$$M = log(A) + 3$$

où **log** est une fonction appelée **logarithme décimal** et A est l'amplitude maximale (en µm) des mouvements du sol enregistrés par le sismographe à 100 km de l'épicentre.



<u>Problème :</u> Comment fonctionne l'échelle de la magnitude ?

1) S'approprier Calculer la magnitude M d'un séisme dont l'amplitude maximale mesurée est de 252 µm.

   Arrondir à 0,1 : ....

2) Réaliser On modélise la magnitude M d'un séisme par la fonction f définie par $f(x) = log(x) + 3$ avec $x > 0$.
   Compléter le tableau suivant :

x	1	10	100	1000
$log(x)$				
$log(x) + 3$				

3) Analyser/Raisonner Lorsque l'amplitude est multipliée par 10, que peut-on dire de la magnitude M ?

   ....

   ....

   Si un séisme de magnitude 5,4 correspond à une amplitude maximale de 252 µm. Quelle sera l'amplitude d'un un séisme de magnitude 6,4 ? Un séisme de magnitude 7,4 ?Justifier.

   ....

   ....

   ....

4) Valider Donner une conclusion sur la progression d'une échelle logarithmique.

   ....

   ....

5) Réaliser **Repère semi-logarithmique**.

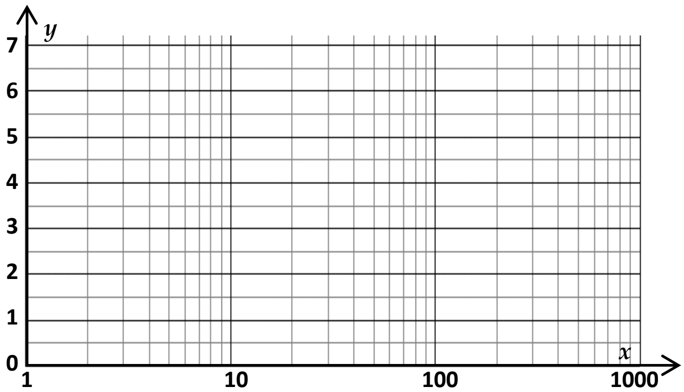
Dans ce type de repère, l'axe des **ordonnées** est gradué selon une **échelle linéaire** alors que l'axe des **abscisses** selon une **échelle logarithmique**.

Placer les points $(x\ ;\ f(x))$.

Donner le type de courbe obtenue.

....

....



A retenir ...

....

....

....

....

Entrainement 3

<u>Exercice 3.1 :</u> Fonction logarithme ☹ 😐 ☺

Soit la fonction f telle que $f(x) = log(10x)$ définie sur $]0\ ;\ 10]$.

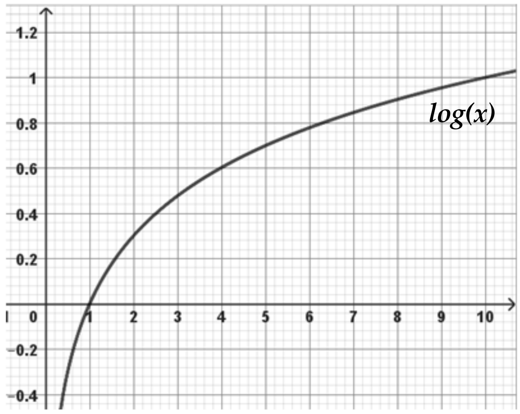
1) Montrer que $f(x) = 1 + log(x)$

....

....

2) A partir de la représentation graphique de $log(x)$ ci-contre, en déduire la représentation graphique de f.

3) Tracer la représentation graphique de f sur la calculatrice.



Activité 4 Résoudre une équation du type $q^x = a$ ou $log(x) = a$

Reprendre l'**activité 1**
<u>Problème :</u> Combien de jours pour 20 000 malades ?

Il faut pour cela résoudre l'équation $3^x = 20000$

$\rightarrow$ x est donné en **dizaines de jours**

Une propriété du logarithme donne : $log(a^x) = x \times log(a)$

En utilisant cette propriété, compléter, résoudre l'équation et répondre à la question.

$log(.......) = log(...........)$

....

....

....

....

Reprendre l'**activité 3**
<u>Problème :</u> Quelle amplitude pour une magnitude de 6 ?

Il faut pour cela résoudre l'équation : $log(x) + 3 = 6$ soit $log(x) = 3$

$\rightarrow x$ est donné en **µm**

La propriété de la réciproque donne : $10^{log(x)} = x$

En utilisant cette propriété, compléter, résoudre l'équation et répondre à la question.

$10^{\cdots\cdots} = 10^{\cdots\cdots}$ ....

....

....

A retenir ...

....

....

....

....

Entrainement 4

L'exponentielle de base 10 et le logarithme décimal sont deux fonctions réciproques.

$log(10^x) = x$ et $10^{log(x)} = x$

Exercice 4.1 : Propriétés

Simplifier :

$log(10) =$	$log(10^4) =$	$log(100\ 000) =$ ....
$log(10^{-3}) =$	$log(0,01) =$	$10^{log(2)} =$ ....

Exercice 4.2 : Equations $q^x = a$

$log(a^n) = n \times log(a)$

Résoudre les équations suivantes (arrondir à 0,01) :

$2^x = 8,5$ $log(......) = log(......) \Leftrightarrow ..... \times log(.....) = log(......)$ $x = \dfrac{\cdots\cdots\cdots..}{\cdots\cdots\cdots..}$ $x \approx$	$3^x = 4789$ ....
$5^{2x} = 2745$	$1,02^x = 1,27$ ....

Exercice 4.3 : Equations $log(x) = a$

Résoudre les équations suivantes (arrondir à 0,01) :

$log(x) = 1,23$	$log(x) = -0,47$ ....