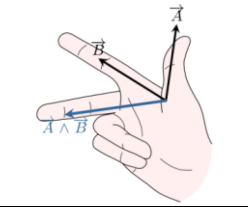
Mathématiques BMI 2

Les vecteurs – Produits vectoriels

Calcul vectoriel		
$\Vert\vec{u} \wedge \vec{v}\Vert = \Vert\vec{u}\Vert \times \Vert\vec{v}\Vert \times \sin(\theta)$	$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$	

5.1 Calculs algébriques de produit vectoriel.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de sens direct.

1. En utilisant la définition du produit vectoriel, donner la valeur de chacun des produits vectoriels suivants :

   a. $\vec{\imath} \wedge \vec{\imath}$;
   b. $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}$;
   c. $\vec{\imath} \wedge \vec{k}$;
   d. $\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath}$;
   e. $\vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath}$;
   f. $\vec{\jmath} \wedge \vec{k}$;
   g. $\vec{k} \wedge \vec{\imath}$;
   h. $\vec{k} \wedge \vec{\jmath}$;
   i. $\vec{k} \wedge \vec{k}$;

5.2 Annales CPI 2009.

$(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère orthonormal direct de l'espace. On considère les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est :

réponse A : $\vec{w}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ réponse B : $\vec{0}$ réponse C : $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

$(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère orthonormal direct de l'espace. On considère les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La norme du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est

réponse A : $\sqrt{2}$ réponse B : $2\sqrt{2}$ réponse C : 4

5.5 Calcul de l'aire d'un triangle.

Dans l'espace rapporté à une repère orthonormal de sens direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et d'unité le centimètre, on considère les points

$$A(2; -2; 3) \;;\; B(4; -6; -1) \text{ et } C(0; -1; 5)$$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer la valeur approchée à 10^{-1} près de l'aire en cm^2 du triangle ABC.

5.6 **Calcul de l'aire d'un parallélogramme.**

Dans l'espace rapporté à une repère orthonormal de sens direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et d'unité le centimètre, on considère les points

$$A(4;5;0)\ ;\ B(6;8;3)\ ;\ C(2;7;4) \text{ et } D(0;4;1)$$

1. **a.** Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et les longueurs AB et AD. En déduire la mesure en degré, à 0.1 près, de l'angle géométrique $\widehat{BAD}$.

2. **a.** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$.

   b. En déduire l'aire du parallélogramme $ABCD$.

5.7 **Calcul de distances et d'aires dans l'espace.**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de sens direct.
On considère les points $A(2,1,0)$, $B(-3,2,3)$ et $C(1,-2,1)$.

1. Faire une figure en perspective cavalière.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3. Calculer les distances AB, AC et BC.
4. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
5. Déduire de ce qui précède une valeur approchée arrondie à 10^{-1} près de l'angle $\widehat{BAC}$.
6. **a.** Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

   b. En déduire l'aire S du triangle ABC.

   c. Donner une valeur approchée à 10^{-1} de S.

5.8 **Volume d'une pyramide.**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de sens direct.
On considère les points $A(0,0,1)$, $B(2,0,0)$ et $C(0,2,2)$.

1. Faire une figure en perspective cavalière.
2. Écrire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3. **a.** Donner les valeurs exactes des distances AB, AC et BC.

   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

4. **a.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

   b. En déduire une valeur approchée arrondie à 10^{-1} près de l'angle $\widehat{BAC}$.

5. **a.** Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

   b. En déduire l'aire S du triangle ABC.

   c. Donner une valeur approchée à 10^{-1} de S.

   d. On note D le point tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
   Démontrer que les coordonnées du point D sont $(2,-2,5)$

   e. Placer le point D sur la figure.

6. On désigne par $\mathscr{V}$ le volume de la pyramide $DABC$.
   Démontrer que $\mathscr{V}=4$.