Les nombres complexes

Forme algébrique et représentation graphique

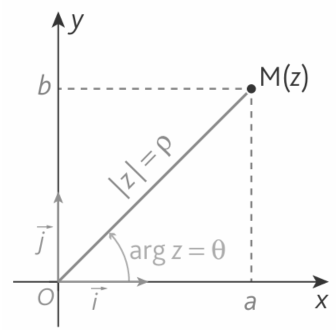
➢ **On utilise la lettre "i" en mathématiques et la lettres "j" en sciences physiques**

- Un nombre complexe est de la forme $z = a + bj$.

Le nombre j est un nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$.
Le nombre a est la partie réelle de z.
Le nombre b est la partie imaginaire de z.

- Le point M, de coordonnées $(a ; b)$ est l'image du nombre complexe $z = a + bj$.
- Le nombre $z = a + bj$ est l'affixe du point M de coordonnées $(a ; b)$.

- Le nombre $z = a + bj$ a pour nombre conjugué $\bar{z}$ tel que $\bar{z} = a - bj$.

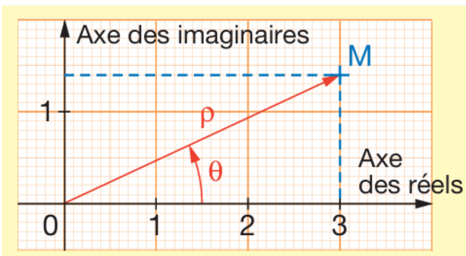


Opérations sur les nombres complexes

- L'addition et la multiplication suivent les mêmes règles que les nombres réels en tenant compte que $j^2 = -1$.
- Soient $z = a + bj$ et $z' = a' + b'j$
  – la somme s'écrit : $z + z' = (a + a') + j(b + b')$
  – le produit s'écrit : $z.z' = aa' - bb' + j(ab' + a'b)$.
- Sous forme trigonométrique : $z = [\rho ; \theta]$ et $z' = [\rho' ; \theta']$.
  – le produit s'écrit : $z.z' = [\rho \times \rho' ; \theta + \theta']$;
  – le quotient s'écrit : $\dfrac{z}{z'} = \left[\dfrac{\rho}{\rho'} ; \theta - \theta'\right]$.

Forme trigonométrique

- Le nombre complexe z est défini par son module ρ et son argument θ.
- La distance OM est le module de z, noté $|z|$ ou ρ : $OM = |z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- L'angle $(\widehat{Ox ; OM})$ est l'argument de z, noté arg z ou θ : $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$.
- La forme trigonométrique d'un nombre complexe s'écrit : $z = [\rho ; \theta] = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$.



Opérations sur les conjugués

• $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ • $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ • $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ • $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$	Soit le nombre complexe : $z = a + ib$ $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$ On a alors : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$

	Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$
	Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$
$Si\ \Delta < 0$	Il existe deux solutions complexes : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Forme exponentielle

On pose : $\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

Soit les nombres complexes z et z' donnés sous leur formes trigonométriques et exponentielles :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r.e^{i\theta}$$
$$z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta') = r'.e^{i\theta'}$$

Le produit $z.z'$ est alors donné par :

$$\boldsymbol{z.z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}}$$

ce qui signifie que le module d'un produit est égal au produit des modules et que l'argument d'un produit est égal à la somme des arguments.

Propriétés

$$e^{i\theta} \times e^{i\vartheta} = e^{i(\theta+\vartheta)} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\vartheta}} = e^{i(\theta-\vartheta)} \qquad e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n \qquad \overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$$

Formules d'Euler : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Formule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$