

Mathématiques BMI 2

Fiche

Equations différentielles

Equation différentielle du 1^{er} ordre sans second membre

On appelle équation différentielle du premier ordre à coefficients constants sans second membre, une équation de la forme :

$$ay' + by = 0 \quad \text{où } a, b \text{ sont des nombres.}$$

Propriété :

Les **solutions** de cette équation différentielle sont les fonctions qui s'écrivent :

$$f(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x} \quad C \text{ étant un nombre quelconque.}$$

Equation différentielle du 2^{ème} ordre sans second membre

On appelle équation différentielle du second ordre sans second membre à coefficients constants, une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres.}$$

On appelle **équation caractéristique** de l'équation différentielle, l'équation du second degré définie par :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Propriété :

- ✓ Si l'équation caractéristique admet **deux racines réelles distinctes** r_1 et r_2 alors les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x} \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des nombres quelconques}$$
- ✓ Si l'équation caractéristique admet **une racine réelle** r alors les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = (Ax + B)e^{rx} \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des nombres quelconques}$$
- ✓ Si l'équation caractéristique admet **deux racines complexes conjuguées** $r = \alpha + i\beta$ et $\bar{r} = \alpha - i\beta$ alors les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = e^{\alpha x}(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)) \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des nombres quelconques}$$

Equation différentielle avec second membre

1^o étape : On résout l'équation **sans second membre** c'est-à-dire qu'il faut trouver **toutes les solutions** de l'équation différentielle donnée à laquelle on a ôté le second membre.

2^o étape : On détermine **une** solution particulière de l'équation **avec second membre**
Exemples d'équation à résoudre et du type de solution particulière à chercher :

- ❶ $y' - 2y = -4x$; solution particulière de la forme $g(x) = mx + p$
- ❷ $y' - 2y = 13 \sin 3x$; solution particulière de la forme $g(x) = m \cos 3x + p \sin 3x$
- ❸ $y'' + 3y' + 2y = 7$; solution particulière type constante.
- ❹ $y'' + 2y' - 3y = e^x$; solution particulière sous la forme $g(x) = A x e^x$

3^o étape : Propriété :

Toutes les solutions de l'équation différentielle avec second membre s'obtiennent en ajoutant :
 les solutions de l'équation sans second membre
 la solution particulière de l'équation avec second membre.