

5

Mathématiques

T^{ale} Bac Pro

Activités

Fonction exponentielle et logarithme décimal

Nom :

Compétence	--	-	+	++	
S'approprier					
Analysier / Raisonneur					
Réaliser					
Valider					
Communiquer					

Classe :

Date évaluation :

Je m'échauffe ...

- 1) Soit la suite géométrique u_n de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 5$.

Donner l'expression de u_n en fonction de n :Calculer le terme u_6 :

Rappel :
 $u_n = u_0 \times q^n$

- 2) Simplifier les écritures en complétant les pointillés :

$7 \times 7^2 = 7 \cdots$

$7^5 \times 7^3 = 7 \cdots$

$(7^3)^4 = 7 \cdots$

$\frac{7^5}{7} = 7 \cdots$

$\frac{7^8}{7^3} = 7 \cdots$

- 3) Ecrire les nombres suivants sous forme de puissances de 10 :

$100 = \dots$

$100\ 000 = \dots$

$\frac{1}{10} = 0,1 = \dots$

$\frac{1}{100\ 000} = 0,000\ 001 = \dots$

Activité 1 L'exponentielle

Une personne a été diagnostiquée comme porteuse d'une maladie contagieuse. Les études concernant la propagation de cette maladie montrent que le nombre de malades triple tous les 10 jours.

Problème : Combien de malades devrait-on avoir au bout de 35 jours ?

- 1) **S'approprier** Donner le nombre de malades au bout de 10 jours, 20 jours, 30 jours et 40 jours.

.....
.....

- 2) **Analysier/Raisonneur** Montrer que ces nombres constituent une suite géométrique dont on donnera le premier terme u_0 et la raison q . **L'indice n représente le nombre de dizaines de jours.**

.....
.....

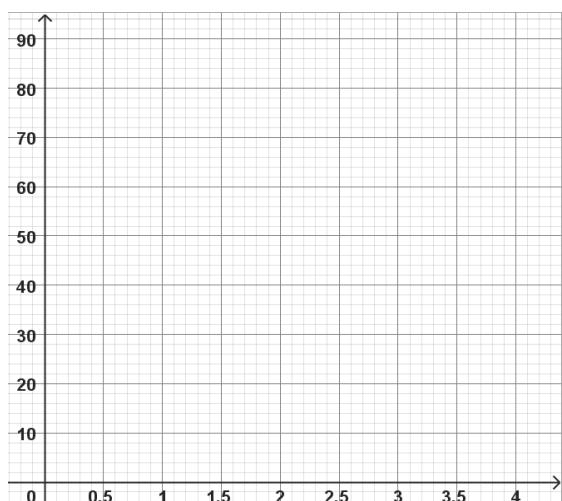
Exprimer le terme u_n en fonction de n : $u_n = \dots$

- 3) **Analysier/Raisonneur** La suite géométrique permet-elle de déterminer le nombre de malades au bout de 25 jours ?

Pourquoi ?

.....
.....

- 4) **Réaliser** Sur la graphique ci-contre, placer les points de coordonnées $(n ; u_n)$.



- 5) **Valider** Tracer la courbe reliant les points, puis déterminer graphiquement le nombre de malades attendus au bout de 35 jours :

.....

La courbe tracée est représentative d'une fonction f appelée **fonction exponentielle** telle que $f(x) = 3^x$.

Elle permet de prolonger la suite géométrique à des valeurs non entières de n .

- 6) **Réaliser** Calculer $f(3,5)$ correspondant au nombre de malades au bout de 35 jours. Retrouve-t-on approximativement la valeur trouvée question 5 ?
-
.....

- 7) **Réaliser** A l'aide de la calculatrice, tracer la représentation graphique de la fonction $f(x) = 3^x$ sur l'intervalle $[0 ; 10]$.



- 8) **Valider** A l'aide des fonctionnalités de la calculatrice, déterminer graphiquement au bout de combien de jours le nombre de malades devrait dépasser 20 000.
-
.....

Je retiens ...

.....
.....

Entrainement 1

Exercice 1.1 : Les puissances



Simplifier les expressions suivantes :

$$3 \times 3^4 \times 3^2 = \dots$$

$$(4^5)^2 \times 4^3 = \dots$$

$$1,987^0 = \dots$$

$$\frac{8,7^5}{8,7^3} = \dots$$

Exercice 1.2 : Exponentielle



Parmi les fonctions ci-dessous, entourer celles qui sont des fonctions exponentielles :

$$f(x)=x^2 \quad g(x)=10^x \quad h(x)=x^3 \quad m=\frac{1}{x} \quad n(x)=3,2^x \quad p(x)=2x \quad q(x)=1,02^x$$

Exercice 1.3 : Fonction exponentielle



Soit la fonction f telle que $f(x) = 1,05^x$ définie sur $[0 ; 20]$.

En utilisant les fonctionnalités de la calculatrice :

- 1) Compléter le tableau de valeurs (arrondir à 0,01) :

x	0	5	10	15	20
$f(x)$					

- 2) Donner sa représentation graphique ci-contre avec la fenêtre de réglage donnée.

- 3) Relever graphiquement les valeurs suivantes arrondies à 0,01 :

$$f(6) = \dots \quad f(12) = \dots$$

Xmin = 0 Ymin = 0
Xmax = 20 Ymax = 3

Activité 2 Histoire du logarithme

La fin du XVI^e siècle est l'époque des grands voyages maritimes et de la découverte des lois régissant le mouvement des planètes.

Les mesures astronomiques, nécessaires pour la navigation, impliquent des calculs complexes. Les multiplications et divisions sont particulièrement longues et pénibles.

Pour simplifier ces calculs, on cherche à construire des tables numériques à deux colonnes, mettant en correspondance les nombres de telle manière qu'à la multiplication de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'addition, plus facile et plus rapide, de deux nombres de la colonne de droite. La première table de ce type est publiée par l'Ecossais John Neper en 1614, après quarante ans de travail !



Problème : Quel est le résultat du produit 13×27 et du quotient $372 \div 31$?

Voici des extraits de tables numériques (ci-contre) pour les nombres de 1 à 32 et les nombres de 350 à 381.

- 1) **S'approprier** Relever les valeurs (arrondies à 0,0001) correspondantes aux nombres **13** et **27**.

.....

Additionner ces deux valeurs ci-contre.

.....
+
.....
.....

A quel nombre correspond cette somme ?

.....

Le résultat du produit **13×27** est

- 2) **Réaliser** En utilisant cette fois-ci une différence, donner le résultat du quotient $\frac{372}{31}$.

.....

.....
-
.....
.....

Le résultat du quotient $\frac{372}{31}$ est

- 3) **Réaliser** A l'aide de la calculatrice, donner les valeurs suivantes (arrondir à 0,0001) :

$\log(13) = \dots$

$\log(372) = \dots$

$+ \log(27) = \dots$

$- \log(31) = \dots$

.....

.....

$\log(351) = \dots$

$\log(12) = \dots$

1	0,0000	350	2,5441
2	0,3010	351	2,5453
3	0,4771	352	2,5465
4	0,6021	353	2,5478
5	0,6990	354	2,5490
6	0,7782	355	2,5502
7	0,8451	356	2,5514
8	0,9031	357	2,5527
9	0,9542	358	2,5539
10	1,0000	359	2,5551
11	1,0414	360	2,5563
12	1,0792	361	2,5575
13	1,1139	362	2,5587
14	1,1461	363	2,5599
15	1,1761	364	2,5611
16	1,2041	365	2,5623
17	1,2304	366	2,5635
18	1,2553	367	2,5647
19	1,2788	368	2,5658
20	1,3010	369	2,5670
21	1,3222	370	2,5682
22	1,3424	371	2,5694
23	1,3617	372	2,5706
24	1,3802	373	2,5717
25	1,3979	374	2,5729
26	1,4150	375	2,5740
27	1,4314	376	2,5752
28	1,4472	377	2,5763
29	1,4624	378	2,5775
30	1,4771	379	2,5786
31	1,4914	380	2,5798
32	1,5051	381	2,5809

Le logarithme permet de transformer un produit en somme et un quotient en différence.

Soit deux nombres positifs a et b . Déduire des résultats précédents les relations donnant $\log(a \times b)$ et $\log\left(\frac{a}{b}\right)$, en fonction de $\log(a)$ et $\log(b)$.

$\log(a \times b) = \dots$

$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \dots$

Je retiens ...

.....

.....

.....

.....

Entrainement 2

Exercice 2.1 : Puissances de 2



Dans le tableau ci-dessous, on a mis en correspondance des puissances de 2 (progression géométrique) et ses exposants (progression arithmétique).

2^x	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ 2+4=6 \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array}$$

En s'inspirant de l'exemple du produit $4 \times 16 = 64$, donner rapidement les résultats des autres produits :

$$4 \times 16 = 64$$

$$16 \times 32 = \dots$$

$$16 \times 128 = \dots$$

$$8 \times 256 = \dots$$

$$32 \times 512 = \dots$$

$$128 \times 512 = \dots$$

$3x$	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147	531441	1594323	4782969	14348907
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$$9 \times 81 = \dots$$

$$27 \times 243 = \dots$$

$$128 \times 512 = \dots$$

Activité 3 Le logarithme décimal

Pour évaluer la force d'un séisme, on calcule sa magnitude M . Pour cela on utilise un sismographe qui enregistre les mouvements du sol. On peut obtenir la magnitude M d'un séisme avec la relation suivante :

$$M = \log(A) + 3$$

où **log** est une fonction appelée **logarithme décimal** et A est l'amplitude maximale (en μm) des mouvements du sol enregistrés par le sismographe à 100 km de l'épicentre.



Problème : Comment fonctionne l'échelle de la magnitude ?

- 1) **S'approprier** Calculer la magnitude M d'un séisme dont l'amplitude maximale mesurée est de 252 μm .

Arrondir à 0,1 :

- 2) **Réaliser** On modélise la magnitude M d'un séisme par la fonction f définie par $f(x) = \log(x) + 3$ avec $x > 0$. Compléter le tableau suivant :

x	1	10	100	1000
$\log(x)$				
$\log(x) + 3$				

- 3) **Analyser/Raisonner** Lorsque l'amplitude est multipliée par 10, que peut-on dire de la magnitude M ?

.....
.....

Si un séisme de magnitude 5,4 correspond à une amplitude maximale de 252 μm . Quelle sera l'amplitude d'un séisme de magnitude 6,4 ? L'amplitude d'un séisme de magnitude 7,4 ? Justifier.

.....
.....
.....

- 4) **Valider** Donner une conclusion sur la progression d'une échelle logarithmique.

.....
.....

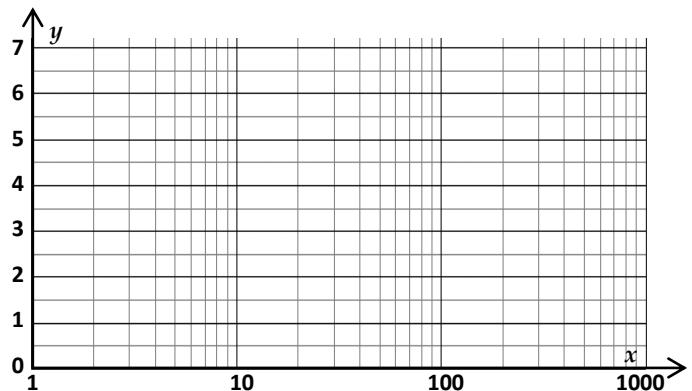
5) Réaliser Repère semi-logarithmique.

Dans ce type de repère, l'axe des **ordonnées** est gradué selon une **échelle linéaire** alors que l'axe des **abscisses** selon une **échelle logarithmique**.

Placer les points $(x ; f(x))$.

Quelle représentation graphique obtient-on ?

.....
.....



A retenir ...

.....
.....
.....

Entrainement 3

Exercice 3.1 : Fonction logarithme



Soit la fonction f telle que $f(x) = \log(10x)$ définie sur $]0 ; 10]$.

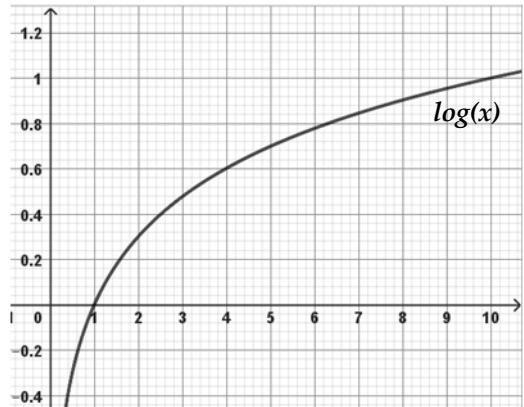
1) Montrer que $f(x) = 1 + \log(x)$

.....

2) A partir de la représentation graphique de $\log(x)$ ci-contre, en déduire la représentation graphique de f .

3) Tracer la représentation graphique de f sur la calculatrice.

4) Tracer la représentation graphique de la fonction $g(x) = \log(100x)$



Activité 4 Résoudre une équation du type $q^x = a$ ou $\log(x) = a$

Reprendre l'activité 1

Problème : Combien de jours pour 20 000 malades ?

Il faut pour cela résoudre l'équation $3^x = 20000$

→ x est donné en **dizaines de jours**

En utilisant cette propriété, compléter, résoudre l'équation et répondre à la question.

Une propriété du logarithme donne : $\log(a^x) = x \times \log(a)$

$\log(\dots\dots) = \log(\dots\dots)$

.....
.....
.....

Reprendre l'activité 3

Problème : Quelle amplitude pour une magnitude de 6 ?

Il faut pour cela résoudre l'équation : $\log(x) + 3 = 6$ soit $\log(x) = 3$

→ x est donné en **μm**

En utilisant cette propriété, compléter, résoudre l'équation et répondre à la question.

La propriété de la réciproque donne : $10^{\log(x)} = x$

$$10 \dots = 10 \dots$$

.....
.....
.....

A retenir ...

Entrainement 4

Exercice 4.1 : Propriétés



Simplifier :

$$\log(10) = \dots$$

$$\log(10^4) = \dots$$

$$\log(100\ 000) = \dots$$

$$\log(10^{-3}) = \dots$$

$$\log(0,01) = \dots$$

$$10^{\log(2)} = \dots$$

L'exponentielle de base 10 et le logarithme décimal sont deux fonctions réciproques.

$$\log(10^x) = x \text{ et } 10^{\log(x)} = x$$

Exercice 4.2 : Équations $q^x = a$



Résoudre les équations suivantes (arrondir à 0,01) :

$$\log(a^n) = n \times \log(a)$$

$$2^x = 8,5$$

$$3^x = 4789$$

$$\log(\dots) = \log(\dots) \Leftrightarrow \dots \times \log(\dots) = \log(\dots)$$

$$\dots$$

$$x = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\dots$$

$$x \approx \dots$$

$$\dots$$

$$5^{2x} = 2745$$

$$1,02^x = 1,27$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

Exercice 4.3 : Équations $\log(x) = a$



Résoudre les équations suivantes (arrondir à 0,01) :

$$\log(x) = 1,23$$

$$\log(x) = -0,47$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$